

Párování a vrcholové pokrytí, Hallova věta

Nechť $G = (V, E)$ je graf.

- *Párování* (angl. matching) v grafu $G = (V, E)$ je množina navzájem disjunktních hran z E . Největší párování v G značíme $m(G)$.
- *Vrcholové pokrytí* (angl. vertex cover) v grafu $G = (V, E)$ je množina vrcholů $X \subseteq V$ taková, že alespoň jeden konec každé hrany v E patří do X , tj.

$$\forall e \in E: e \cap X \neq \emptyset.$$

Nejmenší vrcholové pokrytí v G značíme $vc(G)$.

- **Hallova věta:** Bipartitní graf G s partitami A, B má párování velikosti $|A|$ právě tehdy, když

$$\forall A' \subseteq A: |N_G(A')| \geq |A'|,$$

kde $N_G(A')$ značí množinu sousedů vrcholů A' v B .

- 1** Na přednášce jsme viděli, že $m(G) = vc(G)$ platí pro každý bipartitní graf G (König-Egerváryho věta).
- Dokažte, že $m(G) \leq vc(G)$ platí pro každý graf G , ale $vc(G) \leq m(G)$ už nemusí platit pro každý graf (tj. existuje nějaký graf H pro který platí $m(H) < vc(H)$).
 - Najděte graf H pro který dokonce platí $m(H) + 100 < vc(H)$.
 - Nicméně dokažte, že pro každý graf G platí $vc(G) \leq 2m(G)$.
- 2** Na políčkách šachovnice je položeno několik věží tak, že v každém řádku i každém sloupci je stejný (nenulový) počet věží. Lze za této situace odebrat ze šachovnice několik věží tak, aby se věže navzájem neohrožovaly a současně v každém řádku a sloupci zůstala jedna věž?