

Konečné projektivní roviny

Definice: Konečná projektivní rovina je dvojice $(X, \mathcal{P})$, kde X je konečná množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, splňující následující axiomy:

- (A1) $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists! P \in \mathcal{P}: \{x, y\} \subseteq P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka),
 (A2) $\forall P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q: |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě),
 (A3) $\exists C \subseteq X, |C| = 4, \forall P \in \mathcal{P}: |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

1 Pro každý axiom (A1), (A2), (A3) najděte konečné a neprázdné množiny X a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ takové, že $(X, \mathcal{P})$ nesplňuje vámi vybraný axiom, ale splňuje zbylé axiomy. Dokážete najít nekonečně mnoho takových dvojic $(X, \mathcal{P})$?

2 Uvažme konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ řádu n .

- a) Kolik nejméně přímek z $\mathcal{P}$ musíme zvolit, aby každý prvek $x \in X$ ležel na aspoň jedné přímce?
 b) Kolik nejméně bodů z X musíme zvolit, aby na každé přímce $P \in \mathcal{P}$ ležel aspoň jeden vybraný bod?

3 Necht X je konečná množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$. Uvažme následující axiom:

$$(A3') \quad \exists S, T \in \mathcal{P}, S \neq T: |S| \geq 3 \wedge |T| \geq 3.$$

Dokažte, že $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina právě tehdy, když $(X, \mathcal{P})$ splňuje axiomy (A1), (A2) a (A3').

4 Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každou konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ řádu alespoň n platí následující tvrzení:

$$\exists K \subseteq X, |K| = k, \forall P \in \mathcal{P}: |K \cap P| \leq 2 \quad (\text{existují } k \text{ bodů v obecné poloze}).$$

5 Pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, zkonstruuje graf na n vrcholech s $\Omega(n^{3/2})$ hran, který neobsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf.

(Bonus) Dokažte, že každý graf na n vrcholech bez čtyřcyklu má nejvýše $O(n^{3/2})$ hran.

6 Uvažujme množinu B_n binárních stringů délky n . Pro $x, y \in B_n$ označme $d(x, y)$ počet pozic, na kterých se stringy liší.

Pro silné samoopravné kódy je dobré najít velkou množinu stringů $M \subseteq B_n$ takovou, že každé dva stringy se liší na aspoň 3 pozicích, tj. $(\forall x, y \in M): d(x, y) \geq 3$ (pak totiž dokážeme "opravit 1 chybu"). Jeden takový kód si teď sestojíme:

- a) Pomocí Fanovy roviny zkonstruuje množinu $F \subseteq B_7$ sedmi stringů délky 7 takových, že každé dva se liší na 4 pozicích, tj. $(\forall x, y \in F): d(x, y) = 4$.
 b) Pro daný string x označme $\bar{x}$ jeho doplněk, tj. string, který má na každé pozici opačný symbol. Určete $d(\bar{x}, x)$ a $d(\bar{x}, y)$ pro $x \neq y \in F$.
 c) Najděte množinu $M \subseteq B_7$ celkem 16 stringů takovou, že každé dva stringy se liší na aspoň 3 pozicích.

- 7** V Transylvánské loterii se náhodně losují tři různá čísla 1 až 14. Hráč si před slosováním zakoupením jednoho lístku může vybrat tři čísla, přičemž vyhraje, pokud jsou mezi vylosovanými čísly alespoň dvě jim vybraná čísla. Kolik lístku si stačí koupit, abyste měli zaručenou výhru?