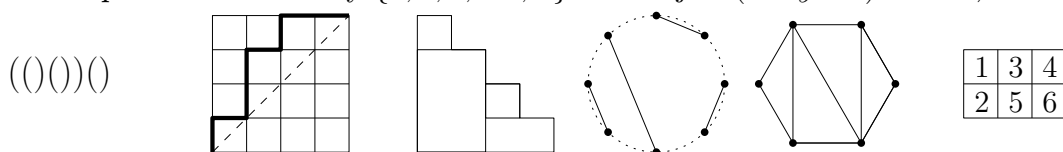


Catalanova čísla

Připomenutí: Posloupnost $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots)$ Catalanových čísel je definována jako $c_0 = c_1 = 1$ a $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot c_{n-1-i}$ pro $n \geq 2$. Lze dokázat, že $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Lze dokázat, že c_n je počet binárních stromů s n vnitřními vrcholy (a tedy $n+1$ listy).

Příklad 1 (Catalanova čísla). Vyjádřete následující počty pomocí Catalanových čísel:

- Počet korektních uzávorkování pomocí n symbolů “(” a n symbolů “)”.
- Počet cest v mřížce z bodu $[0, 0]$ do bodu $[n, n]$, které nikdy neklesnou pod diagonálu $y = x$.
- Počet možností, jak rozdělit “schodiště” o $1 + 2 + \dots + n$ políčkách na n pravoúhelníků.
- Počet triangulací konvexního n -úhelníka.
- Počet možností, jak do tabulky $2 \times n$ vyplnit čísla $1, 2, \dots, 2n$ tak, aby v každém řádku i sloupci čísla rostla.
- (Bonus) Počet permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bez trojice $(..x..y..z..)$ takové, že $x < y < z$.
- (Bonus) Počet permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bez trojice $(..x..y..z..)$ takové, že $x < z < y$.



Projektivní roviny

Připomenutí: Nechť X je konečná množina (“body”) a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin (“přímky”). Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

- $(\forall x \neq y \in X)(\exists! P \in \mathcal{P}) : x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).
- $(\forall P \neq Q \in \mathcal{P}) : |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
- $(\exists C \subseteq X, |C| = 4) : (\forall P \in \mathcal{P}) : |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

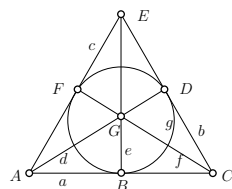
Lze dokázat, že každá konečná projektivní rovina $(X, \mathcal{P})$ má nějaký *řád*.

V rovině řádu n každý bod leží na právě $n+1$ přímkách a každá přímka obsahuje právě $n+1$ bodů.

Rovina řádu n obsahuje právě $n^2 + n + 1$ přímek a právě $n^2 + n + 1$ bodů.

Pokud je n mocnina prvočísla, pak existuje rovina řádu n .

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 2 (Trpaslíci). Sedm trpaslíků si plánuje pracovní týden. Každý ze 7 dní půjdou někteří 4 z nich do práce (těžit drahokamy) a zbylí 3 budou odpočívat a hrát při tom mariáš. Je možné rozplánovat týden tak, aby si každý dva trpaslíci spolu zahráli mariáš?

Příklad 3 (Incidenční graf nemá krátké cykly). *Incidenční graf* roviny $(X, \mathcal{P})$ je bipartitní graf G , který má vlevo vrcholy X , vpravo vrcholy $\mathcal{P}$ a mezi nimi všechny ty hrany (x, P) , kde $x \in P$. Dokažte, že G neobsahuje jako podgraf ani cyklus C_3 ani C_4 ani C_5 .

Příklad 4 (Pokrytí). Uvažme konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ řádu n .

- Kolik nejméně přímek z $\mathcal{P}$ musíme zvolit, aby každý prvek $x \in X$ ležel na aspoň jedné přímce?
- Kolik nejméně bodů z X musíme zvolit, aby na každé přímce $P \in \mathcal{P}$ ležel aspoň jeden vybraný bod?

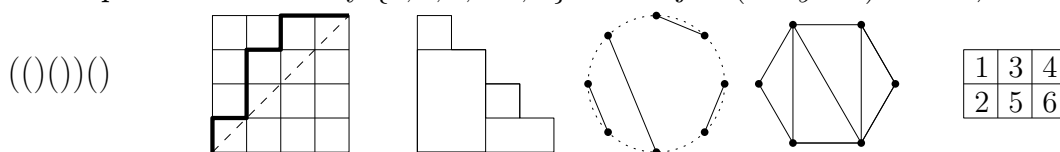
Příklad 5 (Axiom A3'). Dokažte, že místo axiomu (A3) lze použít (A3'): “Existují aspoň 2 přímky, každá s aspoň 3 body” a stále budou sadě axiomů vyhovovat právě všechny konečné projektivní roviny. (Formálně (A3) říká $(\exists P \neq Q \in \mathcal{P}) : |P|, |Q| \geq 3$.)

Catalanova čísla

Připomenutí: Posloupnost $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots)$ Catalanových čísel je definována jako $c_0 = c_1 = 1$ a $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot c_{n-1-i}$ pro $n \geq 2$. Lze dokázat, že $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Lze dokázat, že c_n je počet binárních stromů s n vnitřními vrcholy (a tedy $n+1$ listy).

Příklad 1 (Catalanova čísla). Vyjádřete následující počty pomocí Catalanových čísel:

- Počet korektních uzávorkování pomocí n symbolů “(” a n symbolů “)”.
- Počet cest v mřížce z bodu $[0, 0]$ do bodu $[n, n]$, které nikdy neklesnou pod diagonálu $y = x$.
- Počet možností, jak rozdělit “schodiště” o $1 + 2 + \dots + n$ políčkách na n pravoúhelníků.
- Počet triangulací konvexního n -úhelníka.
- Počet možností, jak do tabulky $2 \times n$ vyplnit čísla $1, 2, \dots, 2n$ tak, aby v každém řádku i sloupci čísla rostla.
- (Bonus) Počet permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bez trojice $(..x..y..z..)$ takové, že $x < y < z$.
- (Bonus) Počet permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bez trojice $(..x..y..z..)$ takové, že $x < z < y$.



Projektivní roviny

Připomenutí: Nechť X je konečná množina (“body”) a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin (“přímky”). Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

- $(\forall x \neq y \in X)(\exists! P \in \mathcal{P}) : x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).
- $(\forall P \neq Q \in \mathcal{P}) : |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
- $(\exists C \subseteq X, |C| = 4) : (\forall P \in \mathcal{P}) : |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

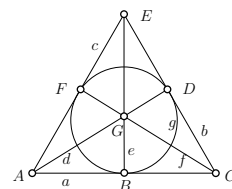
Lze dokázat, že každá konečná projektivní rovina $(X, \mathcal{P})$ má nějaký *řád*.

V rovině řádu n každý bod leží na právě $n+1$ přímkách a každá přímka obsahuje právě $n+1$ bodů.

Rovina řádu n obsahuje právě $n^2 + n + 1$ přímek a právě $n^2 + n + 1$ bodů.

Pokud je n mocnina prvočísla, pak existuje rovina řádu n .

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 2 (Trpaslíci). Sedm trpaslíků si plánuje pracovní týden. Každý ze 7 dní půjdou někteří 4 z nich do práce (těžit drahokamy) a zbylí 3 budou odpočívat a hrát při tom mariáš. Je možné rozplánovat týden tak, aby si každý dva trpaslíci spolu zahráli mariáš?

Příklad 3 (Incidenční graf nemá krátké cykly). *Incidenční graf* roviny $(X, \mathcal{P})$ je bipartitní graf G , který má vlevo vrcholy X , vpravo vrcholy $\mathcal{P}$ a mezi nimi všechny ty hrany (x, P) , kde $x \in P$. Dokažte, že G neobsahuje jako podgraf ani cyklus C_3 ani C_4 ani C_5 .

Příklad 4 (Pokrytí). Uvažme konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ řádu n .

- Kolik nejméně přímek z $\mathcal{P}$ musíme zvolit, aby každý prvek $x \in X$ ležel na aspoň jedné přímce?
- Kolik nejméně bodů z X musíme zvolit, aby na každé přímce $P \in \mathcal{P}$ ležel aspoň jeden vybraný bod?

Příklad 5 (Axiom A3'). Dokažte, že místo axiomu (A3) lze použít (A3'): “Existují aspoň 2 přímky, každá s aspoň 3 body” a stále budou sadě axiomů vyhovovat právě všechny konečné projektivní roviny. (Formálně (A3) říká $(\exists P \neq Q \in \mathcal{P}) : |P|, |Q| \geq 3$.)