Asymptotické odhady

Připomenutí (netriviální odhady):

- $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$
- $\binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$
- $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$

1 Pro velmi velké n seřaďte podle velikosti:

a) Počet všech funkcí $f\colon [n] \to [10]$.

b) Počet prostých funkcí $f\colon [n] \to [n]$.

c) Počet funkcí $f\colon [n] \to [n]$, kde každé $f(i)$ je násobkem 2.

d) Počet funkcí $f\colon [n] \to [n]$, kde každé $f(i)$ je násobkem 3.

2 Pro velmi velká n seřaďte následující výrazy podle velikosti:

$$1000n, \quad \frac{1}{2}n(n+1), \quad 1.1^n, \quad n\sqrt{n}, \quad n\log n.$$

3 Pro velmi velká n seřaďte následující výrazy podle velikosti:

$$\binom{2n}{n}, \quad \binom{2n}{5}, \quad n!, \quad n^n, \quad (\sqrt{n})^n, \quad n^{\sqrt{n}}, \quad n^5.$$

Vytvořující funkce

Připomenutí:

- *Vytvořující funkce* pro posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada
$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$
- Vytvořující funkce pro posloupnost $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ je $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

4 Najděte vytvořující funkci (v uzavřeném tvaru) pro následující posloupnost:

a) $0, 0, 2, 2, 2, 2, \dots$

b) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

c) $1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots$

d) $4, 8, 6, 32, 64, \dots$

e) $1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots$

f) (bonus) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

5 Najděte posloupnost, která má vytvořující funkci:

a) $\frac{1}{1-3x}$,

b) $\frac{1}{1+x}$,

c) $\frac{x}{1-x^3}$,

d) (bonus) $\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Stránka cvičení: `https://iuuk.mff.cuni.cz/~miksanik/2025/kg1_2025`.

6 Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost definována předpisem $a_n = 2^n$. Víme, že daná posloupnost má vytvořující funkci $A(x) = \frac{1}{1-2x}$. Vyjádřete pomocí $A(x)$ vytvořující funkci pro posloupnost:

a) $0, a_0, a_1, a_2, \ldots$

b) $a_0 + 1, a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots$

c) $3a_0, 3a_1, 3a_2, \ldots$

d) $a_1, a_2, a_3, \ldots$

e) $a_0, -a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5, \ldots$

f) $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \ldots$

g) (bonus) $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \ldots$

h) (bonus) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$

7 Víme, že posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovaná předpisem $a_n = \frac{1}{n+1}$ má vytvořující funkci

$$A(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Najděte posloupnost, která má vytvořující funkci:

a) $A(-x)$,

b) $A(x^2)$,

c) $A(2x)$,

d) $A'(x)$.

Vytvořující funkce: řešení rekuretně zadaných posloupností

8 Mějme posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovanou následovně:

a) $a_0 = 1$ a $a_n = 3a_{n-1} - 1$ pro $n \geq 1$,

b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ pro $n \geq 2$,

c) $a_0 = 1$ a $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$ pro $n \geq 1$.

Najděte vytvořující funkci pro danou posloupnost a vzorec pro a_n (v uzavřených tvarech).

Polynomy

9

a) Mějme mince v hodnotě 1, 2, 3, 4 Kč v neomezeném množství. Kolika způsoby můžeme zaplatit 6 Kč pomocí 3 mincí?

b) Mějme mince v hodnotě 1, 2, . . ., 10 Kč v neomezeném množství. Kolika způsoby můžeme zaplatit 13 Kč pomocí 4 mincí?

c) Mějme mince v hodnotě 1, 2, 3, 4 Kč v neomezeném množství. Kolika způsoby můžeme zaplatit 7 Kč pomocí 3 mincí?

d) Mějme mince v hodnotě 1, 3, 5, 7, 9 Kč v neomezeném množství. Kolika způsoby můžeme zaplatit 16 Kč pomocí 4 mincí? (Ve všech případech na pořadí záleží.)

10 V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků: trubičky, větrníky, indiánky. Kolika způsoby můžeme nakoupit 12 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili alespoň dva kousky a zároveň koupili nejvýše tři indiánky, přičemž na pořadí záleží.