Asymptotické odhady

Připomenutí (netriviální odhady):

- $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$
- $\binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$
- $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$

1 Pro velmi velké n seřaďte podle velikosti:

a) Počet všech funkcí $f\colon [n] \to [10]$.

b) Počet prostých funkcí $f\colon [n] \to [n]$.

c) Počet funkcí $f\colon [n] \to [n]$, kde každé $f(i)$ je násobkem 2.

d) Počet funkcí $f\colon [n] \to [n]$, kde každé $f(i)$ je násobkem 3.

2 Pro velmi velká n seřaďte následující výrazy podle velikosti:

$$1000n, \quad \frac{1}{2}n(n+1), \quad 1.1^n, \quad n\sqrt{n}, \quad n\log n.$$

3 Pro velmi velká n seřaďte následující výrazy podle velikosti:

$$\binom{2n}{n}, \quad \binom{2n}{5}, \quad n!, \quad n^n, \quad (\sqrt{n})^n, \quad n^{\sqrt{n}}, \quad n^5.$$

Polynomy a Mocninné řady

4

a) Mějme mince v hodnotě 1, 2, 3, 4 Kč v neomezeném množství. Kolika způsoby můžeme zaplatit 6 Kč pomocí 3 mincí?

b) Mějme mince v hodnotě 1, 2, . . ., 10 Kč v neomezeném množství. Kolika způsoby můžeme zaplatit 13 Kč pomocí 4 mincí?

c) Mějme mince v hodnotě 1, 2, 3, 4 Kč v neomezeném množství. Kolika způsoby můžeme zaplatit 7 Kč pomocí 3 mincí?

d) Mějme mince v hodnotě 1, 3, 5, 7, 9 Kč v neomezeném množství. Kolika způsoby můžeme zaplatit 16 Kč pomocí 4 mincí? (Ve všech případech na pořadí záleží.)

5 V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků: trubičky, větrníky, indiánky. Kolika způsoby můžeme nakoupit 12 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili alespoň dva kousky a zároveň koupili nejvýše tři indiánky, přičemž na pořadí záleží.

6 Určete koeficient

a) u x a u x^2 v polynomu $(1 + x + x^2)^3$,

b) u x a u x^2 v mocninné řadě $(1 + x + x^2 + \ldots)^3$,

c) u x^7 v polynomu $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^{20}$,

d) u x^{15} v polynomu $(x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})^4$,

e) u x^{28} v polynomu $(x + x^3 + x^4 + \cdots + x^{30})^6$

Stránka cvičení: `https://iuuk.mff.cuni.cz/~miksanik/2025/kg1_2025`.

$\boxed{\mathbf{7}}$ <u>Připomenutí:</u>

- *Mocninná řada* (s reálnou proměnnou x) je řada tvaru
$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_i x^i,$$
kde $(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_k)_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.
- *Součet řady* je definovaný jako limita částečných součtů (pokud existuje).
- Pro libovolné $x \in (-1, 1)$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$.

Pro velmi malé kladné x sečtěte (tj. vyjádřete bez sumy a bez tří teček):

Nápověda: Využijte, že pro $x \in (-1, 1)$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \ldots$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \ldots$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots$

e) (bonus) $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

f) (bonus) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} - \frac{x^6}{64} + \ldots$