

Tuto sadu domácích úkolů odevzdejte do 11.4.2021. Nebojte se posílat částečná řešení. Prosím nevymýšlejte řešení hromadně na fórech. Maximálně ve třech lidech a to zásadně každý online a jen přes hovor! Ujistěte se, že každý bude sepisovat sám! Pouhé vyzrazení řešení není spolupráce na vymýšlení, každý musí přispět! Napište s kým jste spolupracovali.

[Úkol 3.1] 2 body Mějme pravděpodobnostní prostor daný:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{a, b, c, d\} \\ \mathcal{F} &= \mathcal{P}(\Omega) \\ \Pr[\{a\}] &= \Pr[\{b\}] = 1/3 \\ \Pr[\{c\}] &= \Pr[\{d\}] = 1/6\end{aligned}$$

na něm následující náhodnou veličinu:

$$\begin{aligned}X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(a) &= X(b) = 7/2 \\ X(c) &= 2 \\ X(d) &= 9\end{aligned}$$

1. Určete pravděpodobnostní funkci:

$$\begin{aligned}p_X: \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ p_X(y) &= \Pr[X = y] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = y\}]\end{aligned}$$

2. Určete distribuční funkci (cumulative distribution function – CDF):

$$\begin{aligned}F_X: \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ F_X(x) &= \Pr[X \leq x]\end{aligned}$$

3. Určete její střední hodnotu:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \Pr[X = x]$$

4. Určete její kvantilovou funkci:

$$\begin{aligned}Q_X: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ Q_X(p) &= \inf \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq F_X(x)\}\end{aligned}$$

[Úkol 3.2] 2 body Náhodně uniformně vybíráme reálné číslo z intervalu  $[0, 1]$ . Formálně: mějme pravděpodobnostní prostor daný:

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1] && \text{(reálný interval délky 1)} \\ \mathcal{F} &= \text{Lebesgueovský měřitelné množiny} \\ \Pr[[a, b]] &= \Pr[(a, b)] = b - a && \text{(více než délku intervalu pro tento příklad nepotřebujete)}\end{aligned}$$

Na tomto prostoru máme náhodnou proměnnou:

$$\begin{aligned}X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(y) &= y^2 && \text{(pro libovolné } y \in [0, 1])\end{aligned}$$

1. Určete distribuční funkci (cumulative distribution function – CDF):

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$
$$F_X(x) = \Pr[X \leq x]$$

2. Určete její pravděpodobnostní hustotu (probability density function – PDF):

$$f_X(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

3. Určete její střední hodnotu:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

4. Určete její kvantilovou funkci:

$$Q_X: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$Q_X(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq F_X(x)\}$$