Řešená cvičení z Matematické analýzy II

Karel Král

1. března 2021

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@iuuk.mff.cuni`. . . .

Obsah

Kapitola 1

Zadání

1.1 Cvičení

1. Vzpomeňte si na definici metriky (Definice 2.1).

   (a) Dokažte, že to jsou metrické prostory,

   (b) Nechť uzavřená koule o poloměru $r \in [0, \infty)$ a středu $m \in M$ je definovaná $B(m, r) = \{x \in M \mid d(m, x) \leq r\}$. Nakreslete jak vypadají koule v následujících metrických prostorech.

   (c) Na metrickém prostoru definujeme přímku definovanou dvěma různými body $x, y \in M$ definujeme jako[1]

$$\begin{aligned}\ell(x, y) = &\{z \in M \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \\ &\cup \{z \in M \mid d(z, x) + d(x, y) = d(z, y)\} \\ &\cup \{z \in M \mid d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)\}\,.\end{aligned}$$

   Následují příklady metrických prostorů:

   (a) Euklidovský prostor: $M = \mathbb{R}^n$,

$$d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

      i. Je to metrický prostor:

      ii. Nakreslete kouli:

      iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

   (b) Diskrétní prostor: M je libovolná množina, $d(x, y) = 1$ pokud $x \neq y$ (nula jinak)

      i. Je to metrický prostor:

      ii. Nakreslete kouli:

[1] Všimněte si, že přímka je tvořena body, pro které platí trojúhelníková nerovnost s rovností. Tedy jsou to ty body, které jsou na nějaké nejkratší cestě mezi x, y (tedy úsečka mezi x, y) ale kde nejkratší cesta je dle příslušné metriky. Navíc jsou tam body na polopřímkách (tedy body, pro které je x na nějaké nejkratší cestě mezi z a y (a symetricky pro druhou polopřímku). Ponaučení z toho plyne, že v metrice není vždy nejkratší cesta jen jedna (stejně jako v grafech).

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

(c) $M = F(a,b)$ tj. množina všech omezených funkcí na intervalu $[a,b]$ ($a < b$ jsou reálná čísla), $d = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid a \leq x \leq b\}$

Dokažte, že je to metrický prostor.

Najděte pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkci f_n tak, že $d(f_n, f_m) = 1$ pokud $m \neq n$. Můžete jich najít i víc, jestli chcete.[2]

(d) Manhattanská metrika $M = \mathbb{R}^n$,

$$d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

i. Je to metrický prostor:

ii. Nakreslete kouli:

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

(e) Maximová metrika $M = \mathbb{R}^n$,

$$d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

i. Je to metrický prostor:

ii. Nakreslete kouli:

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

(f) Pařížská metrika $M = \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = \|x - y\|$ pokud $x, y \in \mathbb{R}^2$ leží na stejné polopřímce od $(0,0)$, jinak $d(x,y) = \|x\| + \|y\|$ (kde $\|x\|$ je Euklidovská metrika).

Tato metrika zní jako hračka. Ale moderní navigace používájí ne střed města, ale dálnice a velká města, přes která se pojede (hledejte highway dimension).

i. Je to metrický prostor:

ii. Nakreslete kouli:

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

(g) Vzdálenost na neorientovaném souvislém grafu $G = (V, E)$: $M = V$, $d(u,v)$ je počet hran na nejkratší cestě mezi u, v.

i. Je to metrický prostor:

ii. Nakreslete kouli:

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

(h) Editační vzdálenost: uvažujme nějakou konečnou abecedu, například $\Sigma = \{a, b, c\}$, pak slova jsou konečné sekvence znaků (prázdné slovo je taky slovo, budeme ho značit λ, protože často používané ε je v analýze používané pro něco jiného), tedy $M = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, abc, abb, \ldots\}$. Řekneme, že dvě slova se liší jednou změnou, pokud jedno slovo můžeme dostat z druhého:

- vynecháním znaku (kdekoliv ve slově) ($aaabbbccc \to aaabbccc$)
- přidáním znaku (kamkoliv do slova) ($aaabbbccc \to aaabbcbccc$)

[2]Zkuste si rozmyslet, že v $\mathbb{R}^3$ s Euklidovou metrikou naleznete pouze čtyři body, tak že každé dva z nich mají od sebe vzdálenost jedna.

- změnou znaku na jiný (na dané konkrétní pozici, tedy zkratka za "odebrání znaku a pak přidání jiného na původní pozici") (*aaabbbccc* $\rightarrow$ *aaababccc*)

Vzdálenost dvou slov je pak nejmenší počet změn kterým z jednoho slova přejdeme na druhé.

i. Je to metrický prostor:

ii. Nakreslete kouli:

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

Řešení: 1

2. Rozeberme si pomalu příklad z přednášky. Nechť $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ pokud } x = y = 0 \end{cases}$

(a) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $g(x) = f(a,x)$. Dokažte, že g je spojitá funkce a $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (Symetricky pokud $g(x) = f(x,a)$.)

(b) Nechť $h(x) = f(x,x)$, dokažte, že $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{2}$. (Obdobně pokud $h(x) = f(x,-x)$, pak limita je $-1/2$.)

(c) Prohlédněte si tu funkci na obrázku:
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28xy%29%2F%28x%5E2%2By%5E2%29`

(d) Dokažte, že f není spojitá (přímo z Definice 2.3) pro Euklidovskou metriku.

Řešení: 2

3. Pracujme na $\mathbb{R}^n$ pro nějaké pevné $n \in \mathbb{N}$. Nechť:

- $d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
- $\lambda((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
- $\sigma((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

Dokažte, že d, λ, σ jsou silně ekvivalentní.

Připomeňme, že dvě metriky na stejné množině jsou silně ekvivalentní, pokud

$$\exists \alpha, \beta \in (0,\infty), \forall x, y \in M \colon \alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$$

Řešení: 3

1.2 Cvičení

1. Připomeňte si derivování funkcí jedné proměnné.

Koukněte se na 3blue1brown: `https://www.youtube.com/watch?v=YG15m2VwSjA&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr&index=4`

(a) $\frac{d}{dx}\left(x + 3x^2\right)$

(b) $\frac{d}{dx}(e^x \sin(x))$

(c) $\frac{d}{dz}\left((\sin(2z))^2\right)$

(d) Funkce, které se říká sigmoid je definována $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, spočítejte její derivaci $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

Řešení: 1

2. Nechť (X, d) je metrický prostor. Připomeňte si, že množina je *otevřená*, pokud je okolím každého svého bodu, tedy:

$$A \text{ je otevřená } \equiv \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \colon \Omega(x, \varepsilon) \subseteq A$$

kde $\Omega(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Množina B je *uzavřená*, právě když $X \setminus B$ je otevřená (na přednášce jste měli ekvivalentní definici s tím, že každá konvergentní posloupnost bodů z B má limitu v B).

Dokažte formálně, že:

(a) $\emptyset$ je otevřená i uzavřená

(b) X je otevřená i uzavřená

(c) Jsou-li $U_i \subseteq X$ pro $i \in J$ otevřené, pak $\cup_{i \in J} U_i$ je otevřená (množina indexů J může být libovolně velká).

(d) Jsou-li $U, V \subseteq X$ otevřené, pak $U \cap V$ je otevřená.

Řešení: 2

3. Nechť (X, d) je metrický prostor. Uzávěr množiny $A \subseteq X$ jsme definovali jako $\overline{A} = \{y \in X \mid d(y, A) = 0\} = \{y \in X \mid \inf \{d(y, a) \mid a \in A\} = 0\}$. Na přednášce jste se dozvěděli spoustu užitečných vlastností. Co umíte říct o vztahu následujících dvou množin:

$$\overline{A} \cap \overline{B}$$

a

$$\overline{A \cap B}$$

Řešení: 3

4. Jaký je vztah inverzní funkce a vzoru? Nechť $f \colon X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(a) Kdy platí $f^{-1}[f[A]] = A$?

(b) Kdy platí $f[f^{-1}[B]] = B$?

Řešení: 4

5. Připomeňme si totální diferenciál na konkrétních příkladech. Napište tvar konkrétního totálního diferenciálu.

(a) Nechť $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce jedné proměnné. Pro konkrétnost $f(x) = x^2$.

(b) Nechť $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pro konkrétnost $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Řešení: 5

6. Vzpomeňte si na věty z přednášky, které dávají, že pokud má funkce spojité parciální derivace, tak má totální diferenciál a tím pádem je spojitá.

$$\text{spojité PD} \Rightarrow \text{TD} \Rightarrow \text{funkce je spojitá}$$

Jistě si pamatujete ukázkovou funkci z první přednášky o které jsme dokazovali, že není spojitá. Pojďme ověřit, že nemá spojitou nějakou parciální derivaci.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Řešení: 6

7. Spočítejte parciální derivace následujících funkcí:
   (a) $x^2 + 4xy^3 + y^5$
   (b) x^{y^2}
   (c) $(1+x)^{(1+y)}$

   Řešení: 7

1.3 Cvičení

1. Součiny a projekce:
   (a) Napište formální definici
   (b) Co je součin metrických prostorů (X_1, d_1) je interval $[-1, 2]$ s metrikou danou absolutní hodnotou rozdílu, (X_2, d_2) je interval $[5, 7]$ s diskrétní metrikou ($d(x, y) = 1$ pokud $x \neq y$, jinak nula).

      Určete následující vzdálenosti v $(X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$:
      i. $d((1.3, 5), (1.3, 5))$
      ii. $d((1.1, 5), (1.3, 5))$
      iii. $d((1.3, 5), (1.3, 5.2))$
      iv. $d((1.4, 5), (1.3, 5.3))$
      v. $d((-1, 5), (2, 7))$

      Nakreslete kouli kolem bodu $(0.5, 5.5)$ do vzdálenosti 0.5.

      Nakreslete kouli kolem bodu $(0.5, 5.5)$ do vzdálenosti 1.2.
   (c) Poznámka o součinové metrice – proč se bere maximum.
   (d) Proč jsou projekce spojité funkce
      i. Co je projekce:
      ii. Definice spojité funkce:
      iii. Důkaz spojitosti projekce:
   (e) Ukažte isomorfismus $(X, d_X) \times ((Y, d_Y) \times (Z, d_Z))$ a $((X, d_X) \times (Y, d_Y)) \times (Z, d_Z)$ a $(X, d_X) \times (Y, d_Y) \times (Z, d_Z)$.
   (f) Nechť $(X, d) = (X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$ je součin dvou metrických prostorů. Nechť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost bodů ($x_n \in X$ pro každé $n \in \mathbb{N}$). Dokažte, že $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje právě když konvergují obě posloupnosti $(p_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a $(p_2(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (ve svých příslušných metrických prostorech).
   (g) Druhá část Věty 1 (z druhé přednášky). Nechť $(Y, d'), (X_1, d_1), (X_2, d_2)$ jsou metrické prostory. Nechť $f_1 \colon (Y, d') \to (X_1, d_1)$ a $f_2 \colon (Y, d') \to (X_2, d_2)$ jsou spojité funkce. Pak existuje právě jedna funkce $f \colon : (Y, d') \to (X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$, pro kterou platí $p_1 \circ f = f_1$ a $p_2 \circ f = f_2$ takové f je spojitá funkce.
   (h) Podrobně ukažte, že složení dvou spojitých funkcí je spojitá funkce.

   Řešení: 1

2. Připomeňme, že $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y))$. Spočítejte $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ pro následující funkce:

(a) $f(x,y) = x^3 + 4xy - y^2$

(b) $f(x,y) = x^{y^2}$

Zajímavost je, že pokud jsou obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ definovány a jsou spojité na nějakém okolí bodu (x,y), pak $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$.

Řešení: 2

3. Dnes si spočítáme parciální derivace "postaru", pak to zkusíme s touto funkcí pomocí řetízkového pravidla. Nechť

$$x = r\cos(\alpha)$$

$$y = r\sin(\alpha)$$

Spočítejte parciální derivace funkce

$$H(r,\alpha) = xe^{x+y} = (r\cos\alpha)e^{(r\cos\alpha)+(r\sin\alpha)}$$

(a) Spočítejte parciální derivace bez použití řetízkového pravidla:

i. $$\frac{\partial}{\partial r}\left((r\cos\alpha)e^{(r\cos\alpha)+(r\sin\alpha)}\right)$$

ii. $$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left((r\cos\alpha)e^{(r\cos\alpha)+(r\sin\alpha)}\right)$$

(b) Intermezzo: řetízkové pravidlo pro funkci jedné proměnné. Spočítejte derivaci funkce

i. $f(x) = \sin(2x)$

ii. $f(x) = (\cos(x^3))^2$

iii. $f(x) = \ln((\cos(x^3))^2)$

Řešení: 3

1.4 Cvičení

1. Rozmyslete si, že dané funkce mají v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, napište jeho koeficienty.

(a) $f(x,y) = 3.14$

(b) $f(x,y) = (1+x)(1+y)$

(c) $f(x,y) = (1+x)^2(1+y)^3$

(d) $f(x,y) = \ln(1+x)\ln(1+y)$

(e) $f(x,y) = (1+x)^{1+y}$

Řešení: 1

2. Pro následující funkci $f(x,y) = \sqrt{|x||y|}$:

(a) Dokažte, že je spojitá v bodě $(0,0)$.

(b) Spočítejte v bodě $(0,0)$ parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial}{\partial y}f$.

(c) Dokažte, že f nemá v bodě $(0,0)$ totální diferenciál.

Řešení: 2

3. Příklad z minula, jen používáme značení, které je blíž větě z přednášky. Nechť:

$$\begin{aligned} f &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ g_1 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ g_2 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ H &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xe^{x+y} \\ g_1(r,s) &= r\cos(s) \\ g_2(r,s) &= r\sin(s) \\ H(r,s) &= f(g_1(r,s), g_2(r,s)) \end{aligned}$$

(a) Tento podbod je pouze intuice, proč to tak funguje. Formální důkaz máte ve skriptech, ale myslím, že je užitečné za limitami a derivacemi vidět i to „na malém okolíčku bodu x funkci f aproximuji pomocí lineární funkce $f(x)+hf'(x)$“. Intuice řetízkového pravidla pomocí aproximace malé změny jedné funkční hodnoty (o malinké h):

i. Pro funkce jedné proměnné $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$.

ii. Pro funkce dvou proměnných $f(x+h,y) \approx f(x,y) + h\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$.

(b) Pomocí řetízkového pravidla spočítejte parciální derivace funkce H.

(c) Určete totální diferenciál funkce H.

(d) Aproximujte pro malé ε hodnotu $H(1+\varepsilon,\varepsilon)$ (pomocí totálního diferenciálu).

Řešení: 3

4. Spočítejte všechny parciální derivace následujících funkcí pomocí maticového značení z přednášky.

Připomeňme, že pokud máme dvě funkce

$$g_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$g_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

pak se na ně můžeme koukat jako na vektorovou funkci

$$g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

definovanou jako

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Pak skládání funkcí dává velice dobrý smysl: pokud máme funkci

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

(rozepsaně $f((x,y)^T) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2), f_3(x_1,x_2))^T$) a funkci

$$g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

pak

$$g \circ f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

je dána jen jako

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})).$$

Pro naše funkce definujeme:

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 \end{pmatrix}$$

$$Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_3} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_3} g_2 \end{pmatrix}$$

a v konkrétním bodě:

$$(Dg)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial}{\partial x_3} g_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(x_1, x_2, x_3) & \frac{\partial}{\partial x_3} g_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

pak

$$D(g \circ f) = (Dg)(Df)$$

v konkrétním bodě pak

$$D(g \circ f)(x, y) = (Dg)(f(x, y))(Df)(x, y)$$

(a) Funkce $f \circ g$, kde $f(r, s) = r + rs + s/r$, $g(x, y) = (\sin(xy), x - y)^T$.

(b) Funkce $f(r(x), s(x), t(x))$, kde $f(u, v, w) = u + vw$, $r(x) = s^2$, $s(x) = x^3$, $t(x) = \ln(x)$.

(c) Funkce $f(g(x, y, z))$, kde $f(x) = \cos(x^3)$, $g(x, y, z) = xyz + xy + xz + yz$.

(d) Jak tohle souvisí s aproximací lineární funkcí?

Řešení: 4

1.5 Cvičení

1. Opakování teorie:

   (a) Zopakujte si pořádně teorii. Před větami o implicitních funkcích je to důležité.

   (b) Připomeňte následující definice:

      i. Kompaktní metrický prostor.

      ii. Uzavřená množina.

      iii. Úplný metrický prostor.

      iv. Omezený metrický prostor.

   (c) Připomeňme větu, že podprostor euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je kompaktní právě když je omezený a uzavřený.

   (d) Najděte metrický prostor (X, d) a množinu $A \subseteq X$, která v něm je omezená a uzavřená, ale není kompaktní.

   Řešení: 1

2. Připomeňte si, jak se počítají parciální derivace podle řetízkového pravidla. Propočítejte si příklad s neuronovou sítí z bonusu na konci tohoto pdf.

   Řešení: 2

1.6 Cvičení

1. Vyšetřete extrémy (i lokální) následujících funkcí:
   (a)
   $$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
   $$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$$
   (b)
   $$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
   $$f(x,y) = x^2 - y^2$$
   (c)
   $$f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$$
   $$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

   Řešení: 1

2. Vyšetřete extrémy funkcí za daných podmínek:
   (a)
   $$f(x,y) = xy$$
   na množině
   $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\right\}$$

   Řešení: 2

3. Budeme optimalizovat stan. Stan má tvar vrchlíku (to, co dostaneme z koule, když z ní kus uřízneme rovným nožem). Chceme použít přesně $10m^2$ látky (stříháním si nedělejte hlavu, zajímá nás ve skutečnosti hmotnost…). Látku musíme použít na podlahu (kruh o poloměru r_1) a kupoli, která slouží jako střecha. Chceme aby stan měl co největší objem.

   Pozor na to, že jsem v řešení špatně opsal vzorečky: `https://cs.wikipedia.org/wiki/Kulov%C3%A1_%C3%BAse%C4%8D`. TODO dopočítat

   Řešení: 3

4. (a) Maximalizujte funkci $2x^2 + 12xy - 3y^2$ na jednotkové kružnici.
   (b) Nechť je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická matice. Maximalizujte funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danou $f(x) = x^T Ax$ na jednotkové kružnici ($x^T x = 1$).

   Řešení: 4

1.7 Cvičení

1. Aproximujte následující funkce:
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro připomenutí v jedné proměnné Definice 2.6.
      i. $f(x) = \sin(x)$ pro $a = 0$:
      ii. $f(x) = e^x$ pro $a = 0$:
      iii. $f(x) = \ln(1+x)$ pro $a = 0$:
   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kde $f(x,y) = xe^{x+y}$ na okolí bodu $(0,0)$.

(c) Jde aproximovat i funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Řešení: 1

2. (a) Definujte, kdy je funkce spojitá.
   (b) Definujte, kdy je funkce stejnoměrně spojitá.
   (c) Rozmyslete, že každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá.
   (d) Vzpomeňte si, že pokud je funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak je stejnoměrně spojitá na tomto intervalu.
   (e) Jsou následující funkce spojité nebo dokonce stejnoměrně spojité?
      i. $f(x) = x$ na $\mathbb{R}$
      ii. $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$
      iii. $f(x) = x^2$ na $[1, 5]$

   Řešení: 2

3. Projděme si spolu obě věty o implicitní funkci na konkrétních příkladech.
   (a) „Jediné y“:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

   (b) „Dvě y“:

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2) &= x^2 + y_1^2 + y_2^2 - 3 = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2) &= x + y_1 - 2y_2 = 0 \end{aligned}$$

   konkrétně kolem řešení $(x, y_1, y_2) = (1, 1, 1)$.

   Ukázat ještě jeden příklad na vázané extrémy.

   Řešení: 3

1.8 Cvičení

1. Dávejte pozor na to, kdy můžete limitní objekt uchopit a kdy ne! Definujme metrický prostor (X, d), kde X jsou všechny spojité funkce na uzavřeném intervalu $[0, 2]$:

$$X = \{f\colon [0, 2] \to \mathbb{R} \mid f \text{ je spojitá}\}$$

   Metriku definujeme postupně.

   Ukažte, že:

   (a) Následující je skalární součin:

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^2 f(x)g(x)\, dx$$

   (b) Následující je norma daná skalárním součinem:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$$

(c) Následující je metrika daná normou:

$$d(f,g) = \|f - g\|$$

(d) Ukažte, že $f_n \in X$ kde f_n je definovaná pro $n \in \mathbb{N}^+$ (kladná celá čísla) jako:

$$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, 1-1/n) \cup (1+1/n, 2] \\ nx + 1 - n & \text{pro } x \in [1-1/n, 1) \\ -nx + 1 - n & \text{pro } x \in [1, 1+1/n] \end{cases}$$

(e) Ukažte, že funkce f definovaná jako:

$$f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

nepatří do X ($f \notin X$, tedy není spojitá).

(f) Ukažte, že pokud bychom definovali g_n:

$$g_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, 1-1/n) \cup (1+1/n, 2] \\ n^2x + n - n^2 & \text{pro } x \in [1-1/n, 1) \\ -n^2x + n - n^2 & \text{pro } x \in [1, 1+1/n] \end{cases}$$

i. $g_n \in X$ (je spojitá)

ii. $\int_0^2 g_n(x)\ dx = 1$

iii. následující není funkce:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

(g) Najděte posloupnost funkcí $h_n \in X$ takovou, že:

$$\forall x \in [0,2]\colon \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$$
$$\|h_n\| = 1$$

Tedy tyto funkce sice v každém bodě konvergují k nulové funkci, ale jako posloupnost nekonvergují v (X, d).

(h) Jak by předchozí úvahy dopadly, kdybychom brali (X', d'), kde $X' = \{f\colon [0,2] \to \mathbb{R}\}$, $d'(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,2]\}$?

Řešení: 1

2. Spočítejte integrál $\int_0^1 x^2\ dx$ dle definice Riemannova integrálu.

Řešení: 2

3. Spočítejte následující integrály.

(a) $\int e^x \sin(x)\ dx$

(b) $\int \frac{1}{x\ln(x)}\ dx$

(c) $\int_1^e \ln(x)\ dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} \sin^7(x)\cos(x)\ dx$

(e) Rozložte na parciální zlomky:

i. $\frac{1}{x(x-1)}$

ii. $\frac{4}{(x+2)(2x+1)}$

iii. $\frac{x^3}{(x-2)^2}$

Řešení: 3

1.9 Cvičení

1. Nejspíš jste slyšeli, že některé integrály „neumíme spočítat“ (některé funkce nemají primitivní funkci vyjádřitelnou jako kombinaci nám známých funkcí).

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\ dx$$

je takzvaná chybová funkce. (Tato funkce má ohromné použití ve statistice, pravděpodobnosti, i parciálních diferenciálních rovnicích.) Je spojitá (složení spojitých funkcí), takže dle věty z přednášky ten integrál existuje. Spočítejte Taylorův polynom v nule a integrujte ho.

Pokud bychom spočítali Taylorovu řadu a formálně ji integrovali (dostali bychom řadu a každý její sčítanec bychom integrovali jako polynom). Pozor, že abychom řekli, že jsme takto dostali Taylorovu řadu chybové funkce, tak bychom museli ještě hodně dokazovat! Co všechno se na našem postupu mohlo pokazit?

Řešení: 1

2. Taylorova řada v jedné proměnné ještě jednou:

(a) Už víme, že Taylorova řada pro funkci $\sin(x)$ v nule konverguje pro každé reálné číslo.

(b) Už víme, že Taylorova řada pro funkci $\ln(1+x)$ v nule konverguje jen pro $x \in (-1, 1]$ (jinde diverguje).

(c) Určete Taylorovu řadu funkce

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} && \text{(pokud } x \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

Řešení: 2

3. Spočítejte následující integrál:

(a)

$$\int_{0.0001}^{1} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\ dx$$

(b) Proč myslíte, že následující integrál půjde těžko spočítat programem z Vašeho domácího úkolu?

Řešení: 3

4. Spočítejte následující integrály:

(a) Chytré substituce – existují, je jich fakt hrozně moc. Já na nich rozhodně trvat nebudu.

(b) $\int (\ln(x))^2 \ dx$

(c) $\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} \ dx$

Řešení: 4

5. Ukažte, že:

(a) funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & \text{pokud } x \in (0,1] \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}$$

i. má Newtonův integrál

ii. nemá Riemannův integrál

(b) funkce signum $sgn\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{pokud } x \in [-1,0) \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \\ 1 & \text{pokud } x \in (0,1] \end{cases}$$

i. nemá Newtonův integrál

ii. má Riemannův integrál

(c) Jak s tím souvisí Darbouxova vlastnost?

Více opakování poznámky z přednášek z minulého semestru, Věta 12.11.

Řešení: 5

1.10 Cvičení

1. (a) Připomeňte znění věty o substituci pro jednu proměnnou.

(b) Intuitivně vysvětlete pomocí Riemannova integrálu rovnost následujících integrálů:

i.

$$\int_0^1 \sin(x+1) \ dx = \int_1^2 \sin(x) \ dx$$

ii.

$$\int_0^1 \sin(2x)2 \ dx = \int_0^2 \sin(x) \ dx$$

iii.

$$\int_0^1 \sin(x^2)2x \ dx = \int_0^1 \sin(x) \ dx$$

(c) Připomeňte, jak souvisí objem s determinanty.

(d) Co se stane, když to těleso nedeformujeme lineárním zobrazením, ale zobrazením, které má spojité parciální derivace?

(e) Jak z předchozího uhodnete tvar pro substituci pro vícerozměrný integrál?

Řešení: 1

2. Procvičme si nejjednodušší formu Fubiniho věty – integrál přes obdélník. Spočítejte následující integrály (proměnné po řadě značíme x, y):

   (a) $\int_{[0,2]\times[0,4]} 1 + x \ dxy$

   (b) $\int_{[0,\pi]\times[0,1]} x\sin(xy) \ dxy$

   Řešení: 2

3. Druhá verze Fubiniho věty pro „slušnou" uzavřenou oblast $D \subseteq J_1 \times J_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Pořadí proměnných je opět x, y. Nechť

$$D = \left\{(x, y) \mid y \geq x - 1 \wedge y^2/2 - 6 \leq x\right\}$$

spočítejte

$$\int_D xy \ dxy$$

   (a) Nakreslete D.

   (b) Má tato funkce vůbec integrál?

      i. Ukažte, že je spojitá na vnitřku D.

      ii. Ukažte, že „hranice množiny D má míru nula".

      iii. Rozmyslete si, že umíte sestrojit funkce g_n, které jsou spojité a platí:

$$g_n(x, y) = f(x, y) \qquad \text{(pokud } (x, y) \in D\text{)}$$
$$g_n(x, y) = 0 \qquad \text{(pokud } d(D, (x, y)) \geq 1/n\text{)}$$

      iv. Argumentujte, proč to znamená, že vícerozměrný Riemannův integrál existuje i pro f i pro její rozšíření na obdélník, tedy takovou funkci g, že:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro všechna } (x, y) \in D \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

   (c) Spočítejte příslušný integrál.

   (d) Uvědomte si, že byste ho uměli spočítat i předtím (akorát by nebyl tak příjemný a počítali byste součet více integrálů).

   Řešení: 3

1.11 Cvičení

1. Opakování minulého semestru:

   (a) Spočítejte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\sqrt[16]{2}\dots\sqrt[2^n]{2}$$

(b) Spočítejte

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

(c) Připomeňme, že získat přesný součet řady nemusí být zas tak jednoduché. Nechť následující známé výsledky jsou odstrašujícím příkladem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(d) Vyšetřete konvergenci / divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

(e) O řadě řekneme, že *konverguje absolutně* pokud konverguje řada

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right) \in \mathbb{R}$$

i. Ukažte, že pokud řada konverguje absolutně, pak konverguje.

ii. Dokažte, že pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

(f) Jak zjistím, jestli řada absolutně konverguje? Připomeňme, že v zimním semestru bylo za domácí úkol dokázat D'Alambertovo kritérium konvergence (viz řešené domácí úkoly z minulého semestru).

(g) Dokažte, že pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak nezáleží na pořadí sčítanců.

i. Lemma: Řada konverguje absolutně právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každou konečnou $K \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > n_0\}$ platí

$$\sum_{k \in K} |a_k| < \varepsilon$$

ii. Dokažte původní tvrzení ze zadání.

(h) Dokažte, že pokud máme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ která konverguje (tedy posloupnost jejích částečných součtů jde k nějakému reálnému číslu), ale to samé neplatí o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (tedy ta původní řada není absolutně konvergentní), pak ji můžeme přeuspořádat tak, abychom dostali libovolné reálné číslo. Pro konkrétnost můžete uvažovat řadu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

i. Určete součet té konkrétní řady (přesně).

ii. Ukažte, že pokud si řadu rozdělíme na $b_1, b_2, b_3, \cdots$ a $c_1, c_2, c_3, \cdots$ (kladné a záporné členy v pořadí tak jak se objeví v a_n), pak:

A. I kladných i záporných čísel tam máme nekonečně mnoho.

B. Za předpokladu že původní řada konvergovala, pak

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

C. Žádná z posloupností $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ani $\sum_{n=1}^{\infty} -c_n$ nemá horní mez.

iii. Trik pokud máme danou hodnotu $r \in \mathbb{R}$, pak napřed sčítáme kladná a zastavíme jakmile nasčítáme ostře víc než r, pak začneme přičítat záporná a zastavíme jakmile nasčítáme ostře míň než r, pak sčítáme zase z těch kladných...

iv. Zkuste si předchozí postup konkrétně pro hodnotu $r = 2$.

Řešení: 1

2. Jiné pojetí integrálu (jen přehledově, tohle po vás nikdo chtít nebude, přesto je dobré mít nějakou představu).

   (a) Lebesgueův integrál se většinou zavádí pomocí pojmu míry. Získejte intuici pro míru.

   (b) Proč se tam patláme s nějakou σ-algebrou? Nestačí vzít všechny podmnožiny?

   (c) Jak do toho zapadá Lebesgueův integrál?

   (d) Jde tohle udělat i jinak?

   (e) A k čemu je to dobré?

   (f) Kde se dozvědět víc?

   (g) Co si mám zapamatovat?

   (h) Bonus: jak se zadefinuje Lebesgueova míra:

   (i) Bonus 2: dokažte, že Lebesgueova míra $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je rovná nule.

Řešení: 2

3. Jiné pojetí otevřenosti a tedy i spojitosti (jen přehledově, tohle po vás nikdo chtít nebude, přesto je dobré mít nějakou představu).

   (a) Co to je neformálně?

   (b) Co to je formálně?

   (c) Jak to souvisí s tím, co už umíme?

   (d) K čemu se to hodí? (Některé aplikace jsou spíš homotopie, ale to úzce souvisí.)

   (e) Kde se dozvědět víc?

   (f) Co si mám zapamatovat?

Řešení: 3

Kapitola 2

Tahák

2.1 Metrický prostor

Definice (Definice 1.13). Metrický prostor *je dvojice* (M, d) *kde* M *je množina a* $d\colon M \times M \to [0, \infty)$ *funkce, taková že pro každé* $x, y \in M$*:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. *pro každé* $z \in M$ *platí* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Funkci d *nazýváme metrika na* M*.*
Definice. *Nechť* (X, d) *je metrický prostor a nechť* $(x_n)_n$ *je posloupnost bodů* ($x_n \in X$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$*). Řekneme, že posloupnost* konverguje *k* $x \in X$ *pokud:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \textit{takové že}\ \forall n \geq n_0\colon d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Píšeme

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

2.2 Limity

Věta 1 (Aritmetika limit funkcí)**.** *Nechť* $a, A, B \in \mathbb{R}^*$*, nechť* f, g *jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí* $P(a, \Delta)$ *bodu* a*, nechť platí* $\lim_{x \to a} f(x) = A$*,* $\lim_{x \to a} g(x) = B$*. Potom:*

1. $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = A + B$*, je-li tento součet definovaný*
2. $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = A \cdot B$*, je-li tento součin definovaný*
3. *Nechť je navíc* g *na nějakém prstencovém okolí bodu* a *nenulová, pak* $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = A/B$*, je-li tento podíl definovaný*

Věta 2 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$*, nechť pro nějaké* $\delta > 0$ *mají dvě funkce* $f, g\colon P(a, \delta) \to \mathbb{R}$ *vlastní derivaci, nechť navíc* $g'(x) \neq 0$ *pro všechna* $x \in P(a, \delta)$*.*

1. „Případ $\frac{0}{0}$“ *Jestliže*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

a navíc

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$$

(limita podílu derivací existuje) pak platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. „Případ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ *Nebo pokud*

$$\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$$

a navíc

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$$

(limita podílu derivací existuje) pak platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^+$, $x \to a^-$.

2.3 Spojité zobrazení

Definice (Spojité zobrazení)**.** *Nechť $(X, d), (Y, d')$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je* spojité *pokud:*

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X\colon d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

2.4 Topologie

Definice. *Nechť (M, d) je metrický prostor. Pak označme množinu $\Omega(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ (otevřené okolíčko do vzdálenosti ε). Řekneme, že množina $U \subseteq M$ je* okolí *bodu $x \in M$ právě když existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\Omega(x, \varepsilon) \subseteq U$.*
Definice. *Nechť (M, d) je metrický prostor. Řekneme, že $O \subseteq M$ je* otevřená množina*, pokud je okolím každého svého bodu ($\forall x \in O$ platí, že O je okolím x).*

Intuitivně množina je otevřená, pokud pro každý její bod máme malou kuličku pořád okolo tohoto bodu, která je pořád v té množině.

2.5 Funkce více proměnných

Věta 3. *Nechť $f(x)$ má totální diferenciál v bodě $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Nechť mají funkce $g_k(t_1, \ldots, t_r)$ parciální derivace v $b = (b_1, \ldots, b_r)$ a nechť je $g_k(b) = a_k$ pro všechna $k = 1, \ldots, n$. Pak má funkce*

$$(f \circ g)(t_1, \ldots, t_r) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$$

všechny parciální derivace v b a platí

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(f \circ g)(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(a) \frac{\partial}{\partial t_j} g_k(b).$$

2.6 Taylorův polynom

Definice (Taylorův polynom)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f je funkce definovaná na nějakém okolí a, která má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Taylorův polynom řádu n v bodě a je následující polynom:*

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Definice (Taylorova řada)**.** *Nechť funkce f definovaná na nějakém okolí $a \in \mathbb{R}$ má vlastní derivaci všech řádů v a. Pak Taylorovou řadou v $x \in \mathbb{R}$ rozumíme následující řadu:*

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Definice (Taylorova řada funkce více proměnných)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^d$, $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na nějakém okolí a, která má v a spojité parciální derivace libovolného řádu. Taylorova řada je následující řada:*

$$\begin{aligned}
T^{f,a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{(x_1-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x_d-a_d)^{n_d}}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_d!} \left(\frac{\partial^{n_1+\ldots+n_d} f}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_d^{n_d}} \right)(a_1, \ldots, a_d) \\
= & f(a_1, \ldots, a_d) \\
& + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_d)}{\partial x_j}(x_j - a_j) \\
& + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_d)}{\partial x_j \partial x_k}(x_j - a_j)(x_k - a_k) \\
& + \frac{1}{3!} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial^3 f(a_1, \ldots, a_d)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x_j - a_j)(x_k - a_k)(x_l - a_l) \\
& + \ldots
\end{aligned}$$

Jen poznamenejme, že se Taylorův polynom stupně dva dá zapsat pomocí gradientu a Hessovy matice. Vyšší stupně už by pro podobný zápis potřebovali tenzorovou notaci. Naopak nižší stupeň silně připomíná výraz z definice toho, kdy má funkce totální diferenciál (kdybychom opomněli funkci μ).

Kapitola 3

Řešení

3.1 Cvičení

1. **Vzpomeňte si na definici metriky (Definice 2.1).**

   (a) Dokažte, že to jsou metrické prostory,

   (b) Nechť uzavřená koule o poloměru $r \in [0, \infty)$ a středu $m \in M$ je definovaná $B(m, r) = \{x \in M \mid d(m, x) \leq r\}$. Nakreslete jak vypadají koule v následujících metrických prostorech.

   (c) Na metrickém prostoru definujeme přímku definovanou dvěma různými body $x, y \in M$ definujeme jako[1]

$$\begin{aligned}\ell(x, y) = &\{z \in M \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \\ &\cup \{z \in M \mid d(z, x) + d(x, y) = d(z, y)\} \\ &\cup \{z \in M \mid d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)\}.\end{aligned}$$

   Následují příklady metrických prostorů:

   (a) Euklidovský prostor: $M = \mathbb{R}^n$,

$$d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

   i. Je to metrický prostor:

   Řešení: Tohle je dokonce Euklidovská norma (kterou znáte z lineární algebry):

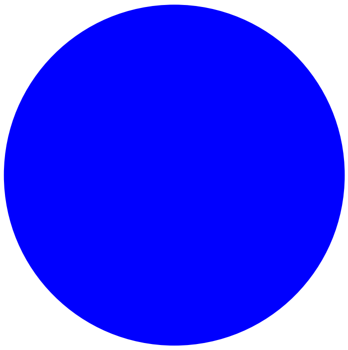
$$\begin{aligned}d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \\ &= \sqrt{\langle x - y \mid x - y \rangle} \\ &= \|x - y\|\end{aligned}$$

[1] Všimněte si, že přímka je tvořena body, pro které platí trojúhelníková nerovnost s rovností. Tedy jsou to ty body, které jsou na nějaké nejkratší cestě mezi x, y (tedy úsečka mezi x, y) ale kde nejkratší cesta je dle příslušné metriky. Navíc jsou tam body na polopřímkách (tedy body, pro které je x na nějaké nejkratší cestě mezi z a y (a symetricky pro druhou polopřímku). Ponaučení z toho plyne, že v metrice není vždy nejkratší cesta jen jedna (stejně jako v grafech).

Z lineární algebry si pamatujete, že každá norma nám určuje i metriku. Ale naopak to samozřejmně neplatí, norma vyžaduje abychom mohli jednotlivé prvky M sčítat a násobit je skalárem. A kdy jste naposledy sčítali vrcholy grafu (nebo je násobili číslem π)? Na druhou stranu na neorientovaných grafech máme krásnou metriku – vzdálenost dvou vrcholů (viz níž).

ii. **Nakreslete kouli:**

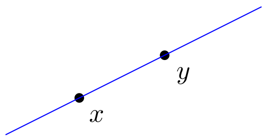
Řešení: Obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: Koule v Euklidovské metrice.

iii. **Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:**

Řešení: Obrázek 3.2.



Obrázek 3.2: Přímka v Euklidovské metrice.

(b) **Diskrétní prostor: M je libovolná množina, $d(x, y) = 1$ pokud $x \neq y$ (nula jinak)**

i. **Je to metrický prostor:**

Řešení: Snadno ověříme axiomy:

- $\forall x, y \in M : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ a navíc $d(x, y) \geq 0$
- $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in M : \in M : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

ii. **Nakreslete kouli:**

Řešení: Koule s poloměrem menším než jedna je jen jeden bod. Koule s poloměrem aspoň jedna je celé M.

iii. **Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:**

Řešení: $\ell(x, y) = \{x, y\}$

(c) $M = F(a, b)$ **tj. množina všech omezených funkcí na intervalu** $[a, b]$ ($a < b$ **jsou reálná čísla),** $d = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid a \leq x \leq b\}$

Dokažte, že je to metrický prostor. ***Řešení:*** Snadno ověříme axiomy:

- $\forall x, y \in M\colon d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ a navíc $d(x, y) \geq 0$

  Nejprve $d(f, f) = \sup\{|f(x) - f(x)| \mid x \in [a, b]\} = 0$.

  Pak pokud $f \neq g$ na intervalu $[a, b]$, pak $\exists x_0 \in [a, b]\colon f(x_0) \neq g(x_0)$, tedy pro toto konkrétní x_0 platí $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$. Dostáváme $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\} \geq |f(x_0) - g(x_0)| > 0$.

- $\forall x, y \in M\colon d(x, y) = d(y, x)$

  Plyne okamžitě z $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ (pro každé $x \in [a, b]$).

- $\forall x, y, z \in M\colon \in M\colon d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

  Plyne okamžitě z $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$ (pro každé $x \in [a, b]$).

Najděte pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkci f_n tak, že $d(f_n, f_m) = 1$ pokud $m \neq n$. Můžete jich najít i víc, jestli chcete.[2]

Řešení: Pro každé $z \in [a, b]$ můžeme definovat funkci: $f_z(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = z \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Snadno ověříme, že pro $z_1 \neq z_2 \in [a, b]$ platí $d(f_{z_1}, f_{z_2}) = 1$.

(d) Manhattanská metrika $M = \mathbb{R}^n$,

$$d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

i. Je to metrický prostor:

Řešení:

- $\forall x, y \in M\colon d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ a navíc $d(x, y) \geq 0$

  Pokud se x, y liší v nějaké souřadnici, tak součet absolutních hodnot bude na té souřadnici mít kladnou hodnotu (a na všech ostatních nezáporné), tedy vyjde kladně.

- $\forall x, y \in M\colon d(x, y) = d(y, x)$

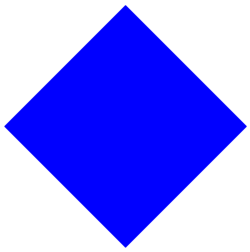
  Snadno dle $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon |a - b| = |b - a|$.

- $\forall x, y, z \in M\colon \in M\colon d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

  Snadno dle $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\colon |a - b| \leq |a - c| + |c - b|$.

ii. Nakreslete kouli:

Řešení: Obrázek 3.3.

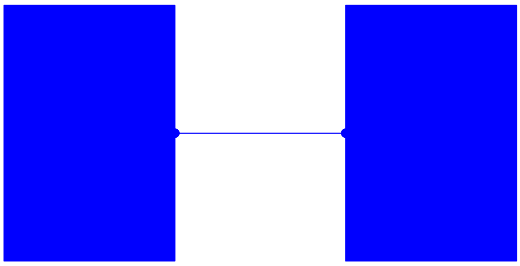


Obrázek 3.3: Koule v Manhattanské metrice.

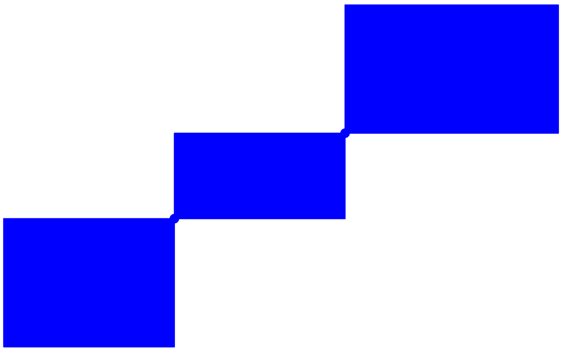
[2] Zkuste si rozmyslet, že v $\mathbb{R}^3$ s Euklidovou metrikou naleznete pouze čtyři body, tak že každé dva z nich mají od sebe vzdálenost jedna.

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

Řešení: Intuitivně rozlišujeme, jestli je prostřední bod na nějaké nejkratší cestě mezi dvěma krajními body. Zde musíme rozlišit dva případy: když ty dva body mají, resp. nemají stejnou jednu souřadnici (Obrázek 3.4, resp. Obrázek 3.5).



Obrázek 3.4: Přímka v Manhattanské metrice – dva body se stejnou souřadnicí (ty polopřímky zobrazené jako obdélníky jsou ve skutečnosti afinní poloprostory).



Obrázek 3.5: Přímka v Manhattanské metrice – dva body s různými souřadnicemi (ty polopřímky zobrazené jako obdélníky jsou ve skutečnosti afinní kvadranty).

(e) Maximová metrika $M = \mathbb{R}^n$,

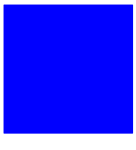
$$d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

i. Je to metrický prostor:

Řešení: Skoro stejně jako pro Manhattanskou metriku.

ii. Nakreslete kouli:

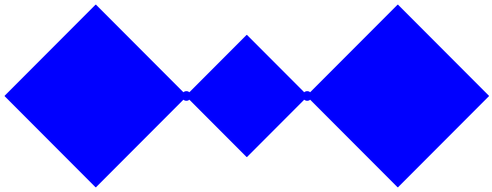
Řešení: Obrázek 3.6.



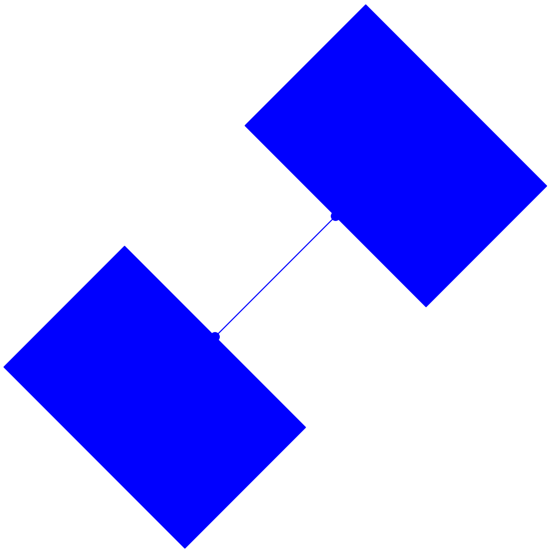
Obrázek 3.6: Koule v maximové metrice.

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

Řešení: Intuitivně maximová a Manhattanská metrika se liší otočením o $\pi/4$. Zde musíme rozlišit dva případy: když ty dva body mají, resp. nemají stejnou jednu souřadnici (Obrázek 3.7, resp. Obrázek 3.8).



Obrázek 3.7: Přímka v maximové metrice – dva body se stejnou souřadnicí.



Obrázek 3.8: Přímka v maximové metrice – dva body s různými souřadnicemi.

(f) Pařížská metrika $M = \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = \|x-y\|$ pokud $x, y \in \mathbb{R}^2$ leží na stejné polopřímce od $(0,0)$, jinak $d(x,y) = \|x\|+\|y\|$ (kde $\|x\|$ je Euklidovská metrika).

Tato metrika zní jako hračka. Ale moderní navigace používájí ne střed města, ale dálnice a velká města, přes která se pojede (hledejte highway dimension).

i. Je to metrický prostor:

Řešení: Stačí rozebrat případy kdy body x, y (případně z) leží nebo neleží na stejné polopřímce od $(0,0)$.

ii. Nakreslete kouli:

Řešení: Koule zde vypadá jako úsečka nebo koule v Euklidovské metrice okolo $(0,0)$ (možná s přidanou úsečkou na některé polopřímce jdoucí z $(0,0)$).

iii. Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:

Řešení: Buď úsečka nebo úsečka do $(0,0)$ a úsečka z $(0,0)$ (podle toho, jestli ty dva body leží nebo neleží na stejné polopřímce z $(0,0)$).

(g) Vzdálenost na neorientovaném souvislém grafu $G = (V,E)$: $M = V$, $d(u,v)$ je počet hran na nejkratší cestě mezi u, v.

i. **Je to metrický prostor:**

Řešení: ***Řešení:*** Snadno ověříme axiomy:

- $\forall x, y \in M\colon d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ a navíc $d(x,y) \geq 0$

  Pokud jsou vrcholy různé, je mezi nimi vždy cesta s aspoň jednou hranou (graf je souvislý).

- $\forall x, y \in M\colon d(x,y) = d(y,x)$

  Graf je neorientovaný, otočíme nejkratší cestu z x do y.

- $\forall x, y, z \in M\colon \in M\colon d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

  Spojením dvou nejkratších cest nemusí vyjít cesta (může to být sled), ale ze sledu umíme vynecháním některých vrcholů a hran dostat cestu, která není delší než původní sled.

ii. **Nakreslete kouli:**

Řešení: Koule odpovídá sousedství do určité vzdálenosti.

iii. **Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:**

Řešení: Přímka může vypadat divoce (úsečka mezi dvěma body je tvořena sjednocením vrcholů všech nejkratších cest mezi nimi, obdobně polopřímky budou vrcholy z takové, že x leží na nějaké nejkratší cestě do y (nebo opačně)).

(h) **Editační vzdálenost: uvažujme nějakou konečnou abecedu, například $\Sigma = \{a, b, c\}$, pak slova jsou konečné sekvence znaků (prázdné slovo je taky slovo, budeme ho značit λ, protože často používané ε je v analýze používané pro něco jiného), tedy $M = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, abc, abb, \ldots\}$. Řekneme, že dvě slova se liší jednou změnou, pokud jedno slovo můžeme dostat z druhého:**

- **vynecháním znaku (kdekoliv ve slově)** ($aaabbbccc \to aaabbccc$)
- **přidáním znaku (kamkoliv do slova)** ($aaabbbccc \to aaabbcbccc$)
- **změnou znaku na jiný (na dané konkrétní pozici, tedy zkratka za "odebrání znaku a pak přidání jiného na původní pozici")** ($aaabbbccc \to aaababccc$)

Vzdálenost dvou slov je pak nejmenší počet změn kterým z jednoho slova přejdeme na druhé.

i. **Je to metrický prostor:**

Řešení:

ii. **Nakreslete kouli:**

Řešení: Koule kolem $abba$ do vzdálenosti jedna (abeceda je $\Sigma = \{a, b, c\}$): $\{abba\} \cup$ $\{bba, aba, abb\} \cup \{abbaa, abbab, abbac, abbba, abbca, ababa, abcba, aabba, acbba, babba, cabba\} \cup$ $\{aaba, abaa, bbba, abbb, cbba, acba, abca, abbc\}$

iii. **Nakreslete přímku jdoucí dvěma body:**

Řešení: Přímka bude nekonečná, ale intuice toho, že jeden z bodů je na nějaké nejkratší cestě mezi zbylými dvěma pořád platí.

2. **Rozeberme si pomalu příklad z přednášky. Nechť $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je definována:**
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \textbf{ pro } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 \textbf{ pokud } x=y=0 \end{cases}$

   (a) **Nechť $a\in\mathbb{R}$ a $g(x)=f(a,x)$. Dokažte, že g je spojitá funkce a $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ (Symetricky pokud $g(x)=f(x,a)$.)**

   Řešení: Pokud $a=0$, pak $g(x)=0$ je konstantní a spojitá (limita v nule je nulová).

   Pokud $a\neq 0$, pak $g(x)=\frac{ax}{a^2+x^2}$, což je funkce definovaná všude (jmenovatel je vždy nenulový). Můžeme použít Větu o aritmetice limit funkcí 3.

   (b) **Nechť $h(x)=f(x,x)$, dokažte, že $\lim_{x\to 0} h(x)=\frac{1}{2}$. (Obdobně pokud $h(x)=f(x,-x)$, pak limita je $-1/2$.)**

   Řešení: $h(x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$ (pro $x\neq 0$, $h(x)=0$ pro $x=0$ dle definice).

   (c) **Prohlédněte si tu funkci na obrázku:**
   `https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28xy%29%2F%28x%5E2%2By%5E2%29`

   (d) **Dokažte, že f není spojitá (přímo z Definice 2.3) pro Euklidovskou metriku.**

   Řešení: Nespojitost hledáme v nějakém bodě (mechanicky negujeme výraz z definice):[3]

$$
\begin{aligned}
\neg\,(\forall x\in X, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall y\in X\colon d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon)\\
\exists x\in X\colon \neg\,(\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall y\in X\colon d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon)\\
\exists x\in X, \exists\varepsilon>0\colon \neg\,(\exists\delta>0, \forall y\in X\colon d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon)\\
\exists x\in X, \exists\varepsilon>0, \forall\delta>0\colon \neg\,(\forall y\in X\colon d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon)\\
\exists x\in X, \exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists y\in X\colon \neg\,(d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon)\\
\exists x\in X, \exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists y\in X\colon d(x,y)<\delta \wedge d'(f(x),f(y))\geq\varepsilon
\end{aligned}
$$

   - Naše $x\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bude bod nespojitosti, tedy $x=(0,0)$.
   - Naše $\varepsilon=1/4$ (volíme něco menšího než jedna polovina z minulé části).
   - Nechť $\delta>0$ je libovolné.
   - Naše $y\in X$ bude $y=\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$. Všimněte si, že dle pořadí kvantifikátorů napřed musíme zvolit x,ε a pak pro dané δ musíme najít vhodné y, tedy speciálně y může záviset na δ (i na x,ε).
   - Nyní si všimneme, že:
     - $d(x,y)=\sqrt{(0-\frac{\delta}{2})^2+(0-\frac{\delta}{2})^2}=\sqrt{\frac{2\delta^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta<\delta$.
     - $f(x)=0$, ale $f(y)=1/2$, dle předchozího cvičení.

   Jak jsme na to celé přišli? Chce to trochu cvik, ale dle předchozího cvičení jsme uhodli vhodná x,ε a pak jsme jenom chtěli vyučít toho, že $f(a,a)=1/2$ a zvolit $y=(a,a)$ dostatečně blízko $(0,0)$.

[3] Oproti cvičení jsme plně kvantifikovali y (předtím nebylo kvantifikované, což logici považují za kvantifikované provšechnítkem, ale my chceme být explicitní).

3. **Pracujme na $\mathbb{R}^n$ pro nějaké pevné $n \in \mathbb{N}$. Nechť:**
   - $d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
   - $\lambda((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
   - $\sigma((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$

   Dokažte, že d, λ, σ jsou silně ekvivalentní.

   Připomeňme, že dvě metriky na stejné množině jsou silně ekvivalentní, pokud

$$\exists \alpha, \beta \in (0, \infty), \forall x, y \in M : \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

Řešení: Všimněte si, že n je pro nás konstanta, toho využijeme.

- Silná ekvivalence λ, σ:

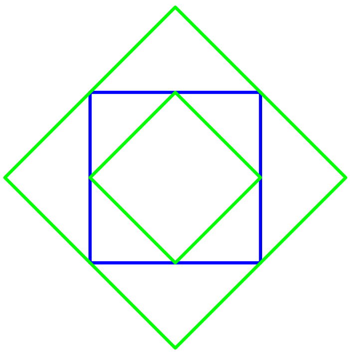
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

  Tedy volíme $\alpha = \frac{1}{n}$ a $\beta = 1$ a dostáváme že pro každá $x, y \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\alpha\lambda(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq \beta\lambda(x, y).$$

  Intuitivně tohle říká, že pokud vezmeme kouli v jedné metrice, tak jí vepíšeme kouli o poloměru α ve druhé metrice, ale zároveň je obsažená v kouli o poloměru β v té druhé metrice. Viz Obrázek 3.9. Podrobně rozepsáno:

  - $\max_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ tedy co je ve vzdálenosti jedna v Manhattanské metrice je ve vzdálenosti jedna i v maximové. Tedy vnitřní zelená koule (zeleně je jen její hranice) v Manhattanské metrice o poloměru jedna je obsažena v modré (modře je jen hranice) kouli o poloměru jedna v maximové metrice.
  - $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$ tedy co je ve vzdálenosti jedna v maximové metrice (modrý čtverec) je ve vzdálenosti nejvýš $\frac{1}{2}$ v Manhattanské metrice (malý zelený čtverec otočený na vrchol).



Obrázek 3.9: Silná ekvivalence maximové a Manhattanské metriky.

3.2 Cvičení

1. **Připomeňte si derivování funkcí jedné proměnné.**

   Koukněte se na 3blue1brown: https://www.youtube.com/watch?v=YG15m2VwSjA&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr&index=4

   (a) $\frac{d}{dx}\left(x+3x^2\right)$

   Řešení: Derivace součtu je součet derivací (pak použijeme to, že derivace je lineární operátor a znalosti derivování polynomů):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x+3x^2\right) &= \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(3x^2\right)\\ &= 1 + 3\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\\ &= 1+6x\end{aligned}$$

   (b) $\frac{d}{dx}(e^x \sin(x))$

   Řešení: Derivace součinu je dána formulí $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = (\frac{d}{dx}f(x))g(x) + f(x)(\frac{d}{dx}g(x))$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^x \sin(x)) &= (\frac{d}{dx}e^x)\sin(x) + e^x(\frac{d}{dx}\sin(x))\\ &= e^x\sin(x) + e^x\cos(x)\\ &= e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)\end{aligned}$$

   (c) $\frac{d}{dz}\left((\sin(2z))^2\right)$

   Řešení: Derivace složené funkce $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = (\frac{d}{dx}f)(g(x))(\frac{d}{dx}(g(x)))$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left((\sin(2z))^2\right) &= 2\sin(2z)(\frac{d}{dz}\sin(2z))\\ &= 2\sin(2z)\cos(2z)(\frac{d}{dz}2z)\\ &= 4\sin(2z)\cos(2z)\end{aligned}$$

   (d) Funkce, které se říká sigmoid je definována $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, spočítejte její derivaci $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

   Řešení: Vzpomeneme na pravidlo derivování podílu:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{(\frac{d}{dx}f(x))g(x) - (\frac{d}{dx}g(x))f(x)}{g(x)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) &= -\frac{0-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} && \text{(zjednodušíme na)}\\ &= \sigma(x)(1-\sigma(x))\end{aligned}$$

2. **Nechť (X, d) je metrický prostor. Připomeňte si, že množina je *otevřená*, pokud je okolím každého svého bodu, tedy:**

$$A \textbf{ je otevřená } \equiv \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0\colon \Omega(x, \varepsilon) \subseteq A$$

kde $\Omega(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Množina B je *uzavřená*, právě když $X \setminus B$ je otevřená (na přednášce jste měli ekvivalentní definici s tím, že každá konvergentní posloupnost bodů z B má limitu v B).

Dokažte formálně, že:

(a) **$\emptyset$ je otevřená i uzavřená**

Řešení: Univerzální kvantifikátor přes prázdnou množinu je jednoduchý (prázdná množina nemá žádný bod, tedy pro každý její bod platí. . .).

Uzavřenost dokážeme z dalšího bodu.

(b) **X je otevřená i uzavřená**

Řešení: Uzavřenost plyne z předchozího bodu ($X \setminus \emptyset = X$ a $\emptyset$ je otevřená).

Pro každé $x \in X$ platí $\Omega(x, 1) \subseteq X$, můžeme volit $\varepsilon = 1$ (mohli jsme samozřejmně volit libovolné ε).

(c) **Jsou-li $U_i \subseteq X$ pro $i \in J$ otevřené, pak $\cup_{i \in J} U_i$ je otevřená (množina indexů J může být libovolně velká).**

Řešení:

- Nechť x je libovolné takové, že $x \in \cup_{i \in J} U_i$, to znamená, že existuje $i \in J$ takové že $x \in U_i$.
- Z otevřenosti U_i plyne, že nějaké okolí x padne do U_i, tedy $\exists \varepsilon > 0\colon \Omega(x, \varepsilon) \subseteq U_i$.
- Vezměme ε z předchozího bodu, pak ale máme

$$\exists \varepsilon > 0\colon \Omega(x, \varepsilon) \subseteq U_i \subseteq \cup_{i \in J} U_i.$$

(d) **Jsou-li $U, V \subseteq X$ otevřené, pak $U \cap V$ je otevřená.**

Řešení:

- Nechť $x \in U \cap V$ je libovolné, tedy platí že $x \in U$ a zároveň $x \in V$.
- Z otevřenosti U plyne, že $\exists \varepsilon_U > 0\colon \Omega(x, \varepsilon_U) \subseteq U$.
- Z otevřenosti V plyne, že $\exists \varepsilon_V > 0\colon \Omega(x, \varepsilon_V) \subseteq V$.
- Volme $\varepsilon_m = \min(\varepsilon_U, \varepsilon_V) > 0$.
- Triviálně platí $\Omega(x, \varepsilon_m) \subseteq \Omega(x, \varepsilon_U) \subseteq U$ (obdobně pro V).
- Tedy máme $\Omega(x, \varepsilon_m) \subseteq U \cap V$.

3. **Nechť (X, d) je metrický prostor. Uzávěr množiny $A \subseteq X$ jsme definovali jako $\overline{A} = \{y \in X \mid d(y, A) = 0\} = \{y \in X \mid \inf\{d(y, a) \mid a \in A\} = 0\}$. Na přednášce jste se dozvěděli spoustu užitečných vlastností. Co umíte říct o vztahu následujících dvou množin:**

$$\overline{A} \cap \overline{B}$$

a

$$\overline{A \cap B}$$

Řešení:

- Rozhodně $\overline{A} \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$. Jako protipříklad stačí vzít $\mathbb{R}$ s Euklidovou metrikou a intervaly

$$A = [0, 1)$$
$$B = [1, 2]$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \not\subseteq \{1\} = [0, 1] \cap [1, 2] = \overline{A} \cap \overline{B}$$

  Rozmyslete si pořádně proč $\emptyset = \overline{\emptyset}$ a jakou roli tam hraje infimum z definice.

- Naopak to ale platí, neboť víme, že pro libovolné $C \subseteq D \subseteq X$ platí $\overline{C} \subseteq \overline{D}$.
  - $A \cap B \subseteq A$, tedy platí $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$
  - $A \cap B \subseteq B$, tedy platí $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$
  - Předchozí dva body platí zároveň, tedy platí $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

4. **Jaký je vztah inverzní funkce a vzoru? Nechť $f\colon X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.**

   (a) **Kdy platí $f^{-1}[f[A]] = A$?**

   Řešení: Zcela jistě platí $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$, protože pro každé $a \in A$ platí:

   $$a \in f^{-1}[\{f(a)\}] \subseteq f^{-1}[f[A]].$$

   Uvažme jednoduchý případ, kdy $A = \{a\}$, tedy

   $$a \in f^{-1}[\{f(a)\}]$$

   (předobraz bere množinu…). Na to, aby $A = f^{-1}[\{f(a)\}]$ musí mít $f(a)$ právě jeden předobraz.

   Tedy vidíme, že pro každé $A \subseteq X$ platí $f^{-1}[f[A]] = A$ právě když je f prostá (injektivní).

   (b) **Kdy platí $f[f^{-1}[B]] = B$?**

   Řešení: Rovnost platí pro každé $B \subseteq X$ právě když f je na (surjektivní).

5. **Připomeňme si totální diferenciál na konkrétních příkladech. Napište tvar konkrétního totálního diferenciálu.**

   (a) **Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce jedné proměnné. Pro konkrétnost $f(x) = x^2$.**

   Řešení: Řekneme, že funkce f má v bodě $x \in \mathbb{R}$ derivaci $A \in \mathbb{R}$, pokud na nějakém okolí bodu x existuje spojitá funkce $\mu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že:

   - $\mu(0) = 0$
   - $f(x+h) - f(x) = Ah + h\mu(h)$

   Předpokládejme, že takové A existuje. Položíme

   $$\mu(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A$$

   Konkrétně nám tedy vyjde:

   $$\begin{aligned}\mu(h) &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} - A \\ &= 2x + h - A\end{aligned}$$

   z čehož vidíme, že $A = 2x$ (nezapomeňte, že x je konkrétní bod a h je proměnná). To sedí s naším poznatkem, že derivace funkce x^2 v bodě x je rovná $2x$.

   (b) **Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pro konkrétnost $f(x,y) = x^2 + y^2$.**

   Řešení: Používáme značení pro $h \in \mathbb{R}^2$ značíme $\|h\| = d(h,(0,0))$ (můžeme použít maximovou nebo Eukleidovskou metriku, neboť jsou silně ekvivalentní).

   Obecný vzorec:

   $$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) = A_1h_1 + A_2h_2 + \|h\|\mu(h)$$

   Konkrétně tedy pro naši f:

   $$\begin{aligned}(x+h_1)^2 + (y+h_2)^2 - (x^2+y^2) &= A_1h_1 + A_2h_2 + \|h\|\mu(h) \\ x^2 + 2xh_1 + h_1^2 + y^2 + 2yh_2 + h_2^2 - x^2 - y^2 &= A_1h_1 + A_2h_2 + \|h\|\mu(h) \\ \mu(h) &= \frac{2xh_1}{\|h\|} + \frac{2yh_2}{\|h\|} + \frac{h_1^2+h_2^2}{\|h\|} - \frac{A_1h_1}{\|h\|} - \frac{A_2h_2}{\|h\|}\end{aligned}$$

   Vidíme, že když položíme $A_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x$ a $A_2 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y$ pak s $h \to (0,0)$ jde $\mu(h) \to 0$ neboť:

   $$\begin{aligned}\mu(h) = \mu(h_1,h_2) &= \frac{h_1^2+h_2^2}{\|h\|} \\ &= \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} && \text{(pro Euklidovskou metriku)} \\ &= \sqrt{h_1^2+h_2^2}\end{aligned}$$

   Pro jiné metriky bychom nulovou limitu ukázali obdobně.

6. **Vzpomeňte si na věty z přednášky, které dávají, že pokud má funkce spojité parciální derivace, tak má totální diferenciál a tím pádem je spojitá.**

$$\textbf{spojité PD} \;\Rightarrow\; \textbf{TD} \;\Rightarrow\; \textbf{funkce je spojitá}$$

Jistě si pamatujete ukázkovou funkci z první přednášky o které jsme dokazovali, že není spojitá. Pojďme ověřit, že nemá spojitou nějakou parciální derivaci.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2) - 2xxy}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Speciálně pokud za x dosadíme nulu (v bodě $(0,0)$ jsme našli nespojitost) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,y) = \frac{1}{y}$$

to ale není vůbec spojitá funkce.

7. **Spočítejte parciální derivace následujících funkcí:**

(a) $x^2 + 4xy^3 + y^5$

Řešení:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 4xy^3 + y^5\right) = 2(x + 2y^3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 4xy^3 + y^5\right) = 12xy^2 + 5y^4$$

(b) x^{y^2}

Řešení:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{y^2}\right) = y^2 x^{y^2-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{y^2}\right) = 2yx^{y^2}\ln(x)$$

(c) $(1+x)^{(1+y)}$

Řešení:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x)^{(1+y)}\right) = (y+1)(x+1)^y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x)^{(1+y)}\right) = (x+1)^{(y+1)}\ln(x+1)$$

3.3 Cvičení

1. **Součiny a projekce:**

(a) **Napište formální definici**

Řešení: Nechť (X_i, d_i) pro $i = 1, \dots, n$ jsou metrické prostory. Na kartézském součinu $X = \prod_{i=1}^n X_i$ definujeme metriku:

$$d\left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\right) = \max_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i).$$

Konkrétně pokud $n = 2$, pak $X = X_1 \times X_2$ a $d\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$, kde samozřejmně $x_1, y_1 \in X_1$ a $x_2, y_2 \in X_2$.

Pokud naše metrické prostory jsou reálné intervaly s metrikou danou absolutní hodnotou rozdílu dvou čísel $X_1 = [0, 1]$ a $X_2 = [3, 4]$, pak $X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. Součin si můžeme představit jako obdélník (množinu všech dvojic čísel kde první číslo je z prvního intervalu a druhé z druhého) obdařený maximovou metrikou.

(b) **Co je součin metrických prostorů (X_1, d_1) je interval $[-1, 2]$ s metrikou danou absolutní hodnotou rozdílu, (X_2, d_2) je interval $[5, 7]$ s diskrétní metrikou ($d(x, y) = 1$ pokud $x \neq y$, jinak nula).**

Určete následující vzdálenosti v $(X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$:

i. $d((1.3, 5), (1.3, 5))$

Řešení: $d((1.3, 5), (1.3, 5)) = \max(d_1(1.3, 1.3), d_2(5, 5)) = \max(0, 0) = 0$

ii. $d((1.1, 5), (1.3, 5))$

Řešení: $d((1.1, 5), (1.3, 5)) = \max(d_1(1.1, 1.3), d_2(5, 5)) = \max(0.2, 0) = 0.2$

iii. $d((1.3, 5), (1.3, 5.2))$

Řešení: $d((1.3, 5), (1.3, 5.2)) = \max(d_1(1.3, 1.3), d_2(5, 5.2)) = \max(0, 1) = 1$

iv. $d((1.4, 5), (1.3, 5.3))$

Řešení: $d((1.4, 5), (1.3, 5.3)) = \max(d_1(1.4, 1.3), d_2(5, 5.3)) = \max(0.1, 1) = 1$

v. $d((-1, 5), (2, 7))$

Řešení: $d((-1, 5), (2, 7)) = \max(d_1(-1, 2), d_2(5, 7)) = \max(3, 1) = 3$

Nakreslete kouli kolem bodu $(0.5, 5.5)$ do vzdálenosti 0.5.

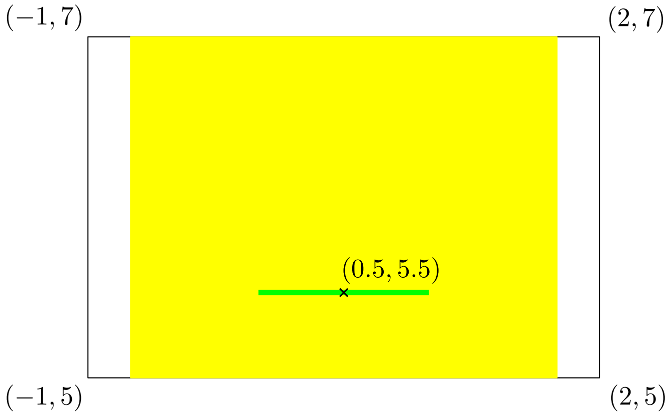
Nakreslete kouli kolem bodu $(0.5, 5.5)$ do vzdálenosti 1.2.

Řešení: Viz obrázek 3.10. Samozřejmně, že kdybychom součin dvou metrických prostorů neobdařili maximovou metrikou, ale jinou metrikou, pak by koule vypadaly jinak (viz následující podpříklad).

(c) **Poznámka o součinové metrice – proč se bere maximum.**

Řešení: Připomeňme silnou ekvivalenci metrik, kterou jsme dokazovali pro Euklidovskou, maximovou a Manhattanskou metriku.

Mohli bychom brát i něco jiného než maximum (třeba odmocninu z součtu druhých mocnin vzdáleností). Ale to se chová hezky pro součin dvou metrických prostorů (nebo konečně mnoha). Na druhou stranu se člověk může zeptat, jak to celé zobecnit pro součin nekonečného množství metrických prostorů, pak se bude to maximum hodit, tedy spíše supremum.



Obrázek 3.10: Příklad koulí v součinové metrice. Modře koule kolem bodu $(0.5, 5.5)$ do vzdálenosti 0.5. Žlutě koule kolem bodu $(0.5, 5.5)$ do vzdálenosti 1.2.

(d) **Proč jsou projekce spojité funkce**

i. **Co je projekce:**

Řešení: Funkce která pro n-tici čísel vrátí j-té z nich: Pokud $(X, d) = (X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$, pak máme dvě funkce: *projekce na první souřadnici*

$$p_1 \colon (X, d) \to (X_1, d_1)$$

daná jako

$$p_1((x_1, x_2)) = x_1$$

a druhá funkce *projekce na druhou souřadnici*

$$p_2 \colon (X, d) \to (X_2, d_2)$$

daná jako

$$p_2((x_1, x_2)) = x_2$$

ii. **Definice spojité funkce:**

Řešení: Viz definice 2.3.

iii. **Důkaz spojitosti projekce:**

Řešení: Víme, že $(X, d) = (X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$ je součin dvou metrických prostorů. Projekce $p_1 \colon X \to X_1$ je spojitá pokud:

$$\forall x = (x_1, x_2) \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y = (y_1, y_2) \in X \colon d(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

A. Pro libovolný bod $x = (x_1, x_2) \in X$

B. pro libovolné $\varepsilon > 0$

C. volíme $\delta = \varepsilon$

D. Pak pokud nějaké $y = (y_1, y_2) \in X$ splňuje $d(x, y) < \delta$, můžeme rozepsat dle definice součinu metrických prostorů:

$$\varepsilon = \delta > d(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

Tedy

$$\varepsilon > d_1(x_1, y_1) = d_1(p_1((x_1, x_2)), p_1((y_1, y_2))) = d_1(x_1, y_1)$$

(e) Ukažte isomorfismus $(X, d_X) \times ((Y, d_Y) \times (Z, d_Z))$ a $((X, d_X) \times (Y, d_Y)) \times (Z, d_Z)$ a $(X, d_X) \times (Y, d_Y) \times (Z, d_Z)$.

Řešení: $(x,(y,z)) \mapsto ((x,y),z)$ případně $(x,(y,z)) \mapsto (x,y,z)$

(f) Nechť $(X, d) = (X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$ je součin dvou metrických prostorů. Nechť $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost bodů ($x_n \in X$ pro každé $n \in \mathbb{N}$). Dokažte, že $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje právě když konvergují obě posloupnosti $(p_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a $(p_2(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (ve svých příslušných metrických prostorech).

Řešení: Připomeňme definici konvergence v metrickém prostoru (Definice 2.1).

- $\Rightarrow$ Plyne okamžitě z $d_i(p_i(x), p_i(y)) \le d(x, y)$.
- $\Leftarrow$ Nechť obě posloupnosti konvergují. Pro dané $\varepsilon > 0$ existují n_1 pro první souřadnici a n_2 pro druhou souřadnici (příslušná n_0 z definice, ale chceme je rozlišit). Volíme $n_0 = \max(n_1, n_2)$ a pak jistě

$$\forall n > n_0 \colon d(x_n, x) = \max(d_1(p_1(x_n), p_1(x)), d_2(p_2(x_n), p_2(x))) < \varepsilon$$

Poznámka: toto tvrzení se dá snadno rozšířit na součin konečně mnoha metrických prostorů. Viz Lemma 5.2 ze skript.

(g) Druhá část Věty 1 (z druhé přednášky). Nechť $(Y, d'), (X_1, d_1), (X_2, d_2)$ jsou metrické prostory. Nechť $f_1 \colon (Y, d') \to (X_1, d_1)$ a $f_2 \colon (Y, d') \to (X_2, d_2)$ jsou spojité funkce. Pak existuje právě jedna funkce $f \colon : (Y, d') \to (X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$, pro kterou platí $p_1 \circ f = f_1$ a $p_2 \circ f = f_2$ takové f je spojitá funkce.

Řešení: Taková funkce existuje, položíme $f(y) = (f_1(y), f_2(y))$.

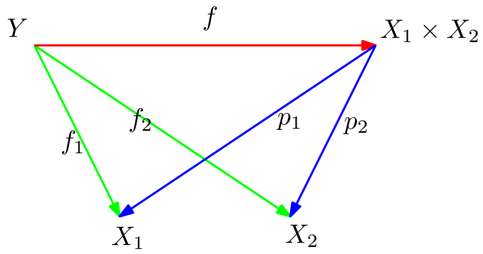
Její spojitost snadno nahlédneme z Definice 2.3.

Obrázek 3.11 nám to ukazuje.

i. Napřed byly metrické prostory $(Y, d_Y), (X_1, d_{X_1}), (X_2, d_{X_1})$ a funkce $f_1 \colon Y \to X_1$ a $f_2 \colon Y \to X_2$.
ii. Zadefinovali jsme součin metrických prostorů $X_1 \times X_2$ (s metrikou $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_{X_1}(x_1, y_1), d_{X_2}(x_2, y_2)))$.
iii. Zadefinovali jsme funkci $f(y) = (f_1(y), f_2(y))$ (pokud byly ty původní funkce spojité, tato nová je také spojitá).
iv. Zadefinovali jsme projekce $p_1 \colon X_1 \times X_2 \to X_1$ $p_2 \colon X_1 \times X_2 \to X_2$ a (konkrétně $p_1(x, y) = x$, $p_2(x, y) = y$).

Tohle vypadá jako příliš jednoduchá konstrukce, aby byla užitečná. Ale není tomu tak, pomůže nám s poměrně složitými úvahami. Nyní si ještě všimněte, že pokud jdete po červené šipce a pak po modré, tak je to to samé jako když jdete po zelené šipce. Tedy formálně $\forall y \in Y : p_1(f(y)) = f_1(y)$ a zároveň $\forall y \in Y : p_2(f(y)) = f_2(y)$.

(h) Podrobně ukažte, že složení dvou spojitých funkcí je spojitá funkce.



Obrázek 3.11: Funkce a projekce.

2. **Připomeňme, že** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y))$**. Spočítejte** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ **a** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ **pro následující funkce:**

   (a) $f(x,y) = x^3 + 4xy - y^2$

   Řešení:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 + 4y$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 4x - 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = 4$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = 4$$

   (b) $f(x,y) = x^{y^2}$

   Řešení: Nejprve použijeme trik

$$f(x,y) = e^{y^2 \ln(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y^2 x^{y^2-1}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = e^{y^2 \ln(x)} 2y \ln(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = e^{y^2 \ln(x)} \frac{y^2}{x} 2y \ln(x) + \frac{e^{y^2 \ln(x)} 2y}{x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = 2yx^{y^2-1} + y^2 e^{(y^2-1)\ln(x)} 2y \ln(x)$$

   Po zjednodušení dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)$$

Zajímavost je, že pokud jsou obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ **a** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ **definovány a jsou spojité na nějakém okolí bodu** (x,y)**, pak** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$**.**

3. **Dnes si spočítáme parciální derivace "postaru", pak to zkusíme s touto funkcí pomocí řetízkového pravidla. Nechť**

$$x = r\cos(\alpha)$$

$$y = r\sin(\alpha)$$

Spočítejte parciální derivace funkce

$$H(r,\alpha) = xe^{x+y} = (r\cos\alpha)e^{(r\cos\alpha)+(r\sin\alpha)}$$

(a) **Spočítejte parciální derivace bez použití řetízkového pravidla:**

i.
$$\frac{\partial}{\partial r}\left((r\cos\alpha)e^{(r\cos\alpha)+(r\sin\alpha)}\right)$$

Řešení:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left((r\cos\alpha)e^{(r\cos\alpha)+(r\sin\alpha)}\right) = \cos(\alpha)e^{r(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}(r\sin(\alpha)+r\cos(\alpha)+1)$$

ii.
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left((r\cos\alpha)e^{(r\cos\alpha)+(r\sin\alpha)}\right)$$

Řešení:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left((r\cos\alpha)e^{(r\cos\alpha)+(r\sin\alpha)}\right) = re^{r(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}\left(r\cos^2(\alpha) - r\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\right)$$

(b) **Intermezzo: řetízkové pravidlo pro funkci jedné proměnné. Spočítejte derivaci funkce**

i. $f(x) = \sin(2x)$

Řešení: My už víme, jak se derivuje složená funkce. Co jste možná ještě neslyšeli, tak tomu postupu derivování složené funkce, který už znáte, se říká řetízkové pravidlo.

Představme si, že

$$t = 2x$$

Tedy $f(x) = g(t(x))$ kde

$$f(x) = \sin(2x),$$

$$g(t) = \sin(t),$$

$$t(x) = 2x.$$

Pak můžeme psát:

$$\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$$

$$\frac{d}{dx}t = \frac{d}{dx}2x = 2$$

$$\frac{d}{dx}\sin(t) = \frac{d}{dt}\sin(t)\frac{d}{dx}t = \cos(2x)2$$

Využíváme při tom celkem přirozeně vypadající trik (který skutečně vyjadřuje co se děje, jen si člověk chce zvyknout na tu notaci) pro

$$f(x) = g(t(x))$$

můžeme psát

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{dg}{dt}(t)\frac{dt}{dx}(x).$$

ii. $f(x) = (\cos(x^3))^2$

Řešení: Nechť

$$\begin{aligned} g(h) &= h^2 \\ h(t) &= \cos(t) \\ t(x) &= x^3 \\ f(x) &= g(h(t(x))) = (\cos(x^3))^2 \end{aligned}$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= \left(\frac{d}{dh}g(h)\right)\left(\frac{d}{dt}h(t)\right)\left(\frac{d}{dx}t(x)\right) \\ &= \left(\frac{d}{dh}h^2\right)\left(\frac{d}{dt}\cos(t)\right)\left(\frac{d}{dx}x^3\right) \\ &= (2h)\,(-\sin(t))\,\big(3x^2\big) \\ &= (2\cos(t))\,(-\sin(t))\,\big(3x^2\big) \\ &= \big(2\cos(x^3)\big)\,\big(-\sin(x^3)\big)\,\big(3x^2\big) \end{aligned}$$

iii. $f(x) = \ln((\cos(x^3))^2)$

3.4 Cvičení

1. **Rozmyslete si, že dané funkce mají v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál, napište jeho koeficienty.**

(a) $f(x, y) = 3.14$

Řešení: Abychom našli okolí U bodu $(0, 0)$ ze zadání a na něm spojitou funkci μ takovou, že $\mu(0, 0) = 0$ a čísla A_1, A_2 taková, že:

$$f((0, 0) + (h_1, h_2)) - f((0, 0)) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \|(h_1, h_2)\|\mu(h_1, h_2)$$

pro každé $h \in U$ (tedy vše z definice toho, kdy má f v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál), tak budeme předpokládat, že ho f má. Pokud ho (totální diferenciál v bodě $(0, 0)$) funkce f má, pak z Tvrzení 3.4 ze skript víme, že $\frac{\partial}{\partial x_k} f((0, 0)) = A_k$.

Obecně pokud f má totální diferenciál v bodě $(0, 0)$, pak platí:

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$
$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Tedy spočítáme A_k a pak určíme funkci μ. Napřed spočítáme parciální derivace:

$$\frac{\partial(3.14)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial(3.14)}{\partial y} = 0$$

ty vyšly jako konstantní funkce, ale ještě do těchto konstantních funkcí musíme dosadit bod $(0, 0)$, tedy:

$$A_1 = \frac{\partial(3.14)}{\partial x}(0, 0) = 0$$
$$A_2 = \frac{\partial(3.14)}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Takže by mělo platit:

$$\begin{aligned} f((0, 0) + (h_1, h_2)) - f((0, 0)) &= A_1 h_1 + A_2 h_2 + \|(h_1, h_2)\|\mu(h_1, h_2) \\ 3.14 - 3.14 &= 0h_1 + 0h_2 + \|(h_1, h_2)\|\mu(h_1, h_2) \\ 0 &= \|(h_1, h_2)\|\mu(h_1, h_2) \\ 0 &= \mu(h_1, h_2) \end{aligned}$$

Z toho jsme dostali krásně spojitou funkci μ dokonce na libovolném okolí bodu $(0, 0)$.

(b) $f(x, y) = (1 + x)(1 + y)$

Řešení: Opět abychom našli A_1, A_2, U, μ, tak budeme předpokládat, že funkce má totální diferenciál v $(0, 0)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}((1 + x)(1 + y)) = 1 + y$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}((1 + x)(1 + y)) = 1 + x$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 1 \\
A_2 &= \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 1
\end{aligned}
$$

Tedy by mělo platit:

$$
\begin{aligned}
f((0,0)+(h_1,h_2)) - f((0,0)) &= A_1 h_1 + A_2 h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
(1+h_1)(1+h_2) - (1+0)(1+0) &= 1h_1 + 1h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
1 + h_1 + h_2 + h_1 h_2 - 1 &= h_1 + h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
h_1 h_2 &= \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2)
\end{aligned}
$$

Normu jsme si zvolili jako $\|(h_1,h_2)\| = \max(|h_1|,|h_2|)$, tedy vyjde

$$
\mu(h_1,h_2) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } h_1 = h_2 = 0 \\ \frac{h_1 h_2}{\max(|h_1|,|h_2|)} & \text{jinak} \end{cases}
$$

spojitost této funkce na nějakém okolí $(0,0)$ snadno nahlédneme, neboť pro $(h_1,h_2) \neq (0,0)$ máme:

$$
|\mu(h_1,h_2)| = \left| \frac{h_1 h_2}{\max(|h_1|,|h_2|)} \right| = |\min(|h_1|,|h_2|)|
$$

(c) $f(x,y) = (1+x)^2(1+y)^3$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}((1+x)^2(1+y)^3) &= 2 + 2x \\
\frac{\partial}{\partial y}((1+x)^2(1+y)^3) &= 3 + 6y + 3y^2
\end{aligned}
$$

parciální derivace vyšly hezky spojité, stačí tedy opět dosadit bod $(0,0)$:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (2+2x)(0,0) = 2 \\
A_2 &= (3+6y+3y^2)(0,0) = 3
\end{aligned}
$$

Tedy by mělo platit:

$$
\begin{aligned}
f((0,0)+(h_1,h_2)) - f((0,0)) &= A_1 h_1 + A_2 h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
(1+h_1)^2(1+h_2)^3 - (1+0)^2(1+0)^3 &= 2h_1 + 3h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
(1+2h_1+h_1^2)(1+3h_2+3h_2^2+h_2^3) - 1 &= 2h_1 + 3h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
3h_2^2 + h_2^3 + 6h_1h_2 + 6h_1h_2^2 + 2h_1h_2^3 + 2h_1^2 + 6h_1^2h_2 + 6h_1^2h_2^2 + 2h_1^2h_2^3 &= \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2)
\end{aligned}
$$

Laskavý čtenář opět nahlédne, že pokud funkci μ dodefinujeme $\mu(0,0) = 0$, pak je spojitá na nějakém okolí bodu $(0,0)$.

(d) $f(x,y) = \ln(1+x)\ln(1+y)$

Řešení:

$$
\frac{\partial}{\partial x}(\ln(1+x)\ln(1+y)) = \frac{\ln(1+y)}{1+x}
$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln(1+x)\ln(1+y)) = \frac{\ln(1+x)}{1+y}$$

parciální derivace vyšly hezky spojité na malém okolí bodu $(0,0)$ (řekněme do vzdálenosti 0.5), stačí tedy opět dosadit bod $(0,0)$:

$$A_1 = \left(\frac{\ln(1+y)}{1+x}\right)(0,0) = 0$$
$$A_2 = \left(\frac{\ln(1+x)}{1+y}\right)(0,0) = 0$$

Tedy by mělo platit:

$$\begin{aligned}
f((0,0)+(h_1,h_2)) - f((0,0)) &= A_1h_1 + A_2h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
\ln(1+0+h_1)\ln(1+0+h_2) - \ln(1)\ln(1) &= \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
\ln(1+h_1)\ln(1+h_2) - 0 &= \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\
\frac{\ln(1+h_1)\ln(1+h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} &= \mu(h_1,h_2)
\end{aligned}$$

Stačí si uvědomit, že:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\ln(1+h_1)\ln(1+h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

(jako nápovědu zkuste ukázat, že:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)\ln(1+h)}{|h|} = 0$$

platí pro limitu jedné proměnné).

(e) $f(x,y) = (1+x)^{1+y}$

Řešení: TODO

2. **Pro následující funkci $f(x,y) = \sqrt{|x||y|}$:**

(a) **Dokažte, že je spojitá v bodě $(0,0)$.**

Řešení: Funkce je všude definovaná. Počítáme limitu:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|x||y|} = 0$$

alternativní postup je jít přímo z Definice 2.3 (která je jen ukrytá v té limitě).

(b) **Spočítejte v bodě $(0,0)$ parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial y} f$.**

Řešení: Pro zajímavost napřed zkusíme spočítat parciální derivaci v libovolném bodě (x,y):

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sqrt{|y|}\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\operatorname{sgn}(x)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \sqrt{|x|}\frac{1}{2\sqrt{|y|}}\operatorname{sgn}(y)$$

Jak vidíme, parciální derivace jsou nespojité (jinak by f v tomto bodě měla totální diferenciál).

Co se ale stane, pokud budeme počítat parciální derivace v bodě $(0,0)$? Dle definice:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

(intuitivně to $|y|$ nám výsledek funkce vynuluje, když za něj dosadíme pevnou nulu)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|0} - 0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{0|h|} - 0}{h} = 0$$

(c) **Dokažte, že f nemá v bodě $(0,0)$ totální diferenciál.**

Řešení: Kdyby f měla v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, pak by muselo platit:

$$\begin{aligned} f((0,0)+(h_1,h_2)) - f((0,0)) &= A_1h_1 + A_2h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\ f(h_1,h_2) - 0 &= 0h_1 + 0h_2 + \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\ \sqrt{|h_1||h_2|} &= \|(h_1,h_2)\|\mu(h_1,h_2) \\ \frac{\sqrt{|h_1||h_2|}}{\|(h_1,h_2)\|} &= \mu(h_1,h_2) \end{aligned}$$

Kde ale μ by měla být funkce spojitá na nějakém okolí bodu $(0,0)$ a navíc by muselo platit $\mu(0,0) = 0$. Dokažme, že to neplatí, konkrétně spočítejme limitu:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \mu(h,h) &= \frac{\sqrt{|h||h|}}{h} \\ &= \frac{|h|}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tedy negace definice spojitosti (Definice 2.3, potřebovali jsme aby μ byla spojitá a $\mu(0,0) = 0$):

- Existuje epsilon: $\varepsilon = 0.5$
- že pro každé delta: $\forall \delta > 0$
- existuje bod blízko nule: konkrétně (δ, δ) (pro maximovou normu)
- že funkční hodnota je daleko od nuly: $f(\delta, \delta) = 1$

3. **Příklad z minula, jen používáme značení, které je blíž větě z přednášky. Nechť:**

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
g_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
g_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
H &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= xe^{x+y} \\
g_1(r, s) &= r\cos(s) \\
g_2(r, s) &= r\sin(s) \\
H(r, s) &= f(g_1(r, s), g_2(r, s))
\end{aligned}
$$

(a) **Tento podbod je pouze intuice, proč to tak funguje. Formální důkaz máte ve skriptech, ale myslím, že je užitečné za limitami a derivacemi vidět i to „na malém okolíčku bodu x funkci f aproximuji pomocí lineární funkce $f(x) + hf'(x)$“. Intuice řetízkového pravidla pomocí aproximace malé změny jedné funkční hodnoty (o malinké h):**

i. **Pro funkce jedné proměnné $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$.**

Řešení: Chceme odhadnout:

$$f(g(x + h)) \approx f(g(x)) + h\alpha$$

kde $\alpha = (f \circ g)'(x)$ (to je ten sklon lineární funkce, pomocí které aproximujeme hodnotu $f(g(x + h))$ pro malinké h).

Budeme aproximovat dvakrát a budeme doufat, že to vyjde (tady používáme silný předpoklad, že můžeme dobře aproximovat f i g pomocí lineární funkce a že se ty aproximace dobře složí, porovnejte s předpoklady z přednášky):

$$
\begin{aligned}
f(g(x + h)) &\approx f(g(x) + hg'(x)) && \text{(lineární aproximace vnitřku)} \\
&\approx f(g(x)) + hg'(x)f'(g(x)) && \text{(vstup funkce } f \text{ se od } g(x) \text{ pohl: } hg'(x))
\end{aligned}
$$

Čímž jsme získali odhad pomocí lineární funkce:

$$f(g(x + h)) \approx f(g(x)) + hf'(g(x))g'(x)$$

kde směrnice $f'(g(x))g'(x)$ je ta příslušná derivace funkce $f(g(x))$ v bodě x.

ii. **Pro funkce dvou proměnných $f(x + h, y) \approx f(x, y) + h\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$.**

Řešení: Uděláme to samé, akorát funkci dvou proměnných budeme aproximovat jako (všimněte si podobnosti s tvarem z části o totálním diferenciálu):

$$f(x + h_1, y + h_2) \approx f(x, y) + h_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + h_2 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

Speciálně pro $h_1 = 0$ a $h_2 = 0$ máme:

$$
\begin{aligned}
f(x + h_1, y) &\approx f(x, y) + h_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\
f(x, y + h_2) &\approx f(x, y) + h_2 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)
\end{aligned}
$$

Tím aproximujeme hodnoty $g_1(r+h,s), g_2(r+h,s)$:

$$
\begin{aligned}
g_1(r+h_1,s) &\approx g_1(r,s) + h_1\frac{\partial}{\partial r}g_1(r,s)\\
g_2(r+h_1,s) &\approx g_2(r,s) + h_1\frac{\partial}{\partial r}g_2(r,s)
\end{aligned}
$$

Jak tedy můžeme aproximovat změnu v první složce funkce dané jako

$$H(r+h_1,s) = f(g_1(r+h_1,s), g_2(r+h_1,s))$$

$$
\begin{aligned}
&f(g_1(r+h_1,s), g_2(r+h_1,s))\\
&\quad\approx f(g_1(r,s) + h_1\frac{\partial}{\partial r}g_1(r,s), g_2(r,s) + h_1\frac{\partial}{\partial r}g_2(r,s))\\
&\quad\approx f(g_1(r,s), g_2(r,s)) + h_1\frac{\partial}{\partial r}g_1(r,s)\frac{\partial}{\partial x}f(g_1(r,s), g_2(r,s)) + h_1\frac{\partial}{\partial r}g_2(r,s)\frac{\partial}{\partial y}f(g_1(r,s), g_2(r,s))\\
&\quad\approx f(g_1(r,s), g_2(r,s)) + h_1\left(\frac{\partial}{\partial x}f(g_1(r,s), g_2(r,s))\frac{\partial}{\partial r}g_1(r,s) + \frac{\partial}{\partial y}f(g_1(r,s), g_2(r,s))\frac{\partial}{\partial r}g_2(r,s)\right)
\end{aligned}
$$

Obdobně pokud bychom chtěli aproximovat $H(r, s+h_2)$.

(b) Pomocí řetízkového pravidla spočítejte parciální derivace funkce H.

Řešení: Použijeme tu silnější verzi řetízkového pravidla (ve skriptech zvaná řetězové pravidlo) Věta 3. Zde konkrétně pro $b = (r,s)$, $a = (g_1(r,s), g_2(r,s))$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}H(b) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}f(a)\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}g_1(b)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}f(a)\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}g_2(b)\right)\\
&= \big((e^{x+y} + xe^{x+y})(a)\big)\left(\cos(s)\right) + \big((xe^{x+y})(a)\big)\left(\sin(s)\right)\\
&= \big((e^{x+y} + xe^{x+y})(g_1(r,s), g_2(r,s))\big)\left(\cos(s)\right) + \big((xe^{x+y})(g_1(r,s), g_2(r,s))\big)\left(\sin(s)\right)\\
&= \left(e^{r\cos(s)+r\sin(s)} + r\cos(s)e^{r\cos(s)+r\sin(s)}\right)\left(\cos(s)\right) + \left(r\cos(s)e^{r\cos(s)+r\sin(s)}\right)\left(\sin(s)\right)\\
&= \cos(s)e^{r(\sin(s)+\cos(s))}(r\sin(s) + r\cos(s) + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}H(b) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}f(a)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}g_1(b)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}f(a)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}g_2(b)\right)\\
&= \big((e^{x+y} + xe^{x+y})(a)\big)\left(-r\sin(s)\right) + \big((xe^{x+y})(a)\big)\left(r\cos(s)\right)\\
&= \big((e^{x+y} + xe^{x+y})(g_1(r,s), g_2(r,s))\big)\left(-r\sin(s)\right) + \big((xe^{x+y})(g_1(r,s), g_2(r,s))\big)\left(r\cos(s)\right)\\
&= \left(e^{r\cos(s)+r\sin(s)} + r\cos(s)e^{r\cos(s)+r\sin(s)}\right)\left(-r\sin(s)\right) + \left(r\cos(s)e^{r\cos(s)+r\sin(s)}\right)\left(r\cos(s)\right)\\
&= re^{r(\sin(s)+\cos(s))}\left(r\cos^2(s) - r\sin(s)\cos(s) - \sin(s)\right)
\end{aligned}
$$

Tedy nám vyšlo to samé, jako kdybychom počítali přímo parciální derivace funkce $H(r,s)$.

(c) Určete totální diferenciál funkce H.

(d) Aproximujte pro malé ε hodnotu $H(1+\varepsilon, \varepsilon)$ (pomocí totálního diferenciálu).

4. **Spočítejte všechny parciální derivace následujících funkcí pomocí maticového značení z přednášky.**

   Připomeňme, že pokud máme dvě funkce

$$g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

   pak se na ně můžeme koukat jako na vektorovou funkci

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

   definovanou jako

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$

   Pak skládání funkcí dává velice dobrý smysl: pokud máme funkci

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

   (rozepsaně $f((x,y)^T) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2), f_3(x_1,x_2))^T$) a funkci

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

   pak

$$g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

   je dána jen jako

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})).$$

   Pro naše funkce definujeme:

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 \end{pmatrix}$$

$$Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_3} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_3} g_2 \end{pmatrix}$$

   a v konkrétním bodě:

$$(Dg)(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial}{\partial x_3} g_1(x_1,x_2,x_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(x_1,x_2,x_3) & \frac{\partial}{\partial x_3} g_2(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}$$

   pak

$$D(g \circ f) = (Dg)(Df)$$

   v konkrétním bodě pak

$$D(g \circ f)(x,y) = (Dg)(f(x,y))(Df)(x,y)$$

   (a) **Funkce $f \circ g$, kde $f(r,s) = r + rs + s/r$, $g(x,y) = (\sin(xy), x-y)^T$.**

   Řešení: Nakonec zkusíme spočítat parciální derivace postaru pro naší funkci: $(f \circ g)(x,y) = \sin(xy) + \sin(xy)(x-y) + \frac{x-y}{\sin(xy)}$.

   Napřed si pro jistotu určíme dimenze:

   - $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- $f \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (protože $(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)))$.

Zkusme to podle značení z přednášky:

$$(Df)(r, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} f(r, s) & \frac{\partial}{\partial s} f(r, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + s - \frac{s}{r^2} & r + 1/r \end{pmatrix}$$

$$(Dg)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} g_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(xy)y & \cos(xy)x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pak tedy má platit $D(f \circ g)(x, y) = (Df)(g(x, y))(Dg)(x, y)$, tedy:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 + (x - y) - \frac{x-y}{(\sin(xy)^2} & \sin(xy) + 1/\sin(xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(xy)y & \cos(xy)x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + (x - y) - \frac{x-y}{(\sin(xy)^2}) \cos(xy)y + (\sin(xy) + 1/\sin(xy))1 \\ (1 + (x - y) - \frac{x-y}{(\sin(xy)^2}) \cos(xy)y - (\sin(xy) + 1/\sin(xy)) \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

(transpozice, jinak by se mi to sem nevešlo)

Jen poznamenejme, že pokud počítáme parciální derivace už složené funkce, tak vyjdou stejně:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(f \circ g)(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin(xy) + \sin(xy)(x - y) + \frac{x - y}{\sin(xy)} \right) \\ &= \sin(xy) + y(x - y + 1) \cos(xy) + \left(y(y - x) \frac{\cos(xy)}{\sin(xy)} + 1 \right) \frac{1}{\sin(xy)} \end{aligned}$$

(parciální derivaci dle y si dopočítejte sami, pokud nevěříte).

(b) Funkce $f(r(x), s(x), t(x))$, kde $f(u, v, w) = u + vw$, $r(x) = s^2$, $s(x) = x^3$, $t(x) = \ln(x)$.

(c) Funkce $f(g(x, y, z))$, kde $f(x) = \cos(x^3)$, $g(x, y, z) = xyz + xy + xz + yz$.

(d) Jak tohle souvisí s aproximací lineární funkcí?

Řešení: Vzpomeňte, když jsme chtěli aproximovat funkční hodnotu

$$f(x + h) \approx f(x) + (Df(x))h$$

nám se líp bude pracovat s aproximací

$$f(x + h) - f(x) \approx (Df(x))h$$

protože v tomto případě je pravá strana lineární funkce. Pak vás asi nepřekvapí, že když chceme aproximovat složení dvou funkcí v nějakém bodě, pak tomu odpovídá složení těch lineárních zobrazení, což přesně odpovídá násobení matic.

3.5 Cvičení

1. **Opakování teorie:**

   (a) Zopakujte si pořádně teorii. Před větami o implicitních funkcích je to důležité.

   (b) Připomeňte následující definice:

   i. Kompaktní metrický prostor.

   Řešení: Metrický prostor (X, d) je kompaktní jestliže každá posloupnost v něm obsahuje konvergentní podposloupnost.

   ii. Uzavřená množina.

   Řešení: Podmnožina $A \subseteq X$ metrického prostoru (X, d) je v něm (v tomto metrickém prostoru) uzavřená pokud pro každou podposloupnost $(x_n)_n \subseteq A$, která je konvergentní v (X, d) platí, že $\lim x_n \in A$.

   iii. Úplný metrický prostor.

   Řešení: Metrický prostor (X, d) je úplný, jestliže v něm každá Cauchyovská posloupnost konverguje. Kde $(x_n)_n$ je Cauchyovská posloupnost pokud

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \colon m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

   iv. Omezený metrický prostor.

   Řešení: Metrický prostor (X, d) je omezený, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové že $\forall x, y \in X \colon d(x, y) \leq K$.

   (c) Připomeňme větu, že podprostor euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je kompaktní právě když je omezený a uzavřený.

   (d) Najděte metrický prostor (X, d) a množinu $A \subseteq X$, která v něm je omezená a uzavřená, ale není kompaktní.

   Řešení: Volme $d(a, b) = |a - b|$, $X = \mathbb{Q}$. Tedy racionální čísla s naší obvyklou metrikou.

   Volme $A = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$.

   i. A je omezená neboť $\sup \{d(a, b) \mid a, b \in A\} = 1$.

   ii. A je uzavřená: Vezměme libovolnou posloupnost $(x_n)_n$ kde $x_n \in A$ takovou, že má limitu $\lim_{n\to\infty} x_n = q \in \mathbb{Q}$ (pozor, tady bereme pouze posloupnosti, které mají limitu v původním metrickém prostoru, tedy racionální číslo). Chceme ukázat, že $1 \leq q \leq 2$: bez újmy na obecnosti pokud $q > 2$, pak z definice limity volíme $\varepsilon = (q - 2)/4$. Pro toto ε musí existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0 \colon d(x_n, q) \leq \varepsilon$. To ale znamená, že $d(x_{n_0}, q) \leq \varepsilon$ a tedy $x_{n_0} > 2$, což je spor s tím, že $(x_n)_n$ byla posloupnost bodů v A.

   iii. (A, d) není kompaktní: Vezměme x_n jako prvních n číslic desetinného rozvoje $\sqrt{2}$, tedy $x_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$. Jistě $x_n \in A$ (jsou to určitě racionální čísla mezi 1 a 2).

   Všimneme si, že limita této posloupnosti v euklidovském prostoru (prostor $(\mathbb{R}, d)$) je přesně $\sqrt{2}$, což není racionální číslo. Víme, že pokud má posloupnost limitu, pak každá její podposloupnost má tu samou limitu.

   Tedy nemůže existovat podposloupnost $(x_n)_n$, která by měla limitu v A, tedy A není kompaktní.

2. **Připomeňte si, jak se počítají parciální derivace podle řetízkového pravidla. Propočítejte si příklad s neuronovou sítí z bonusu na konci tohoto pdf.**

3.6 Cvičení

1. **Vyšetřete extrémy (i lokální) následujících funkcí:**

(a)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$$

Řešení: Je jasné, že jediné globální minimum bude v bodě $f(1,3) = 0$. Přesto zkusme použít parciální derivace.

Pokud je v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ extrém, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ a zároveň $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ nebo ty derivace neexistují. Jinými slovy pokud derivace neexistují nebo jsou všechny nulové, pak ten bod je podezřelý z toho, že je extrémní.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 6$$

Obě parciální derivace jsou nulové jen pro bod $a = (1,3)$.

Trocha teorie:

- Jistě si vzpomínáte, že pro funkce jedné proměnné jsme měli test s druhou derivací. Pro jistotu si ho připomeňme: nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pak pokud pro bod $a \in I$ má první i druhou derivaci a navíc platí $f'(a) = 0$, pak:
  - i. $f''(a) > 0$ implikuje, že f má v bodě a lokální minimum,
  - ii. $f''(a) < 0$ implikuje, že f má v bodě a lokální maximum,
  - iii. $f''(a) = 0$ implikuje, že netušíme (například funkce $g(x) = x^3$ vs $h(x) = x^4$ v bodě 0).
- Obdobně pro spojitou funkci dvou proměnných $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definujeme matici druhých derivací, tak zvanou Hessovu matici, $H(x,y)$ (nepleťte si ji s Jacobiánem) následovně: $(H(x_1,x_2))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,x_2)$. Potom když jsou všechny
  - i. Pokud $\det(H(a_1,a_2)) > 0$ a navíc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a_1,a_2) > 0$ pak má f v bodě (a_1,a_2) lokální minimum.
  - ii. Pokud $\det(H(a_1,a_2)) > 0$ a navíc $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a_1,a_2) < 0$ pak má f v bodě (a_1,a_2) lokální maximum.
  - iii. Pokud $\det(H(a_1,a_2)) < 0$ pak má f v bodě (a_1,a_2) sedlový bod.
  - iv. Pokud $\det(H(a_1,a_2)) = 0$ pak netušíme.
- Obdobně pro spojitou funkci n proměnných (Hessián má rozměr $n \times n$) a bod $a \in \mathbb{R}^n$:
  - i. Pokud $H(a)$ je positivně definitní pak má f v bodě a lokální minimum.
  - ii. Pokud $H(a)$ je negativně definitní pak má f v bodě a lokální maximum.
  - iii. Pokud $\det(H(a)) \neq 0$, ale $H(a)$ má i pozitivní i negativní vlastní čísla, pak má f v bodě a sedlový bod.

iv. Jinak netušíme.

Zpátky k příkladu: Hessián vyjde (vzpomeňte si na prohazování pořadí derivování):

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že v bodě $(1,3)$ vyjde pozitivně definitní (jiné body nezkoumáme, protože jinde je nějaká parciální derivace nenulová). Tedy zde skutečně funkce f má lokální minimum.

(b)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Řešení: Tato funkce opravdu vypadá jako krásné sedlo, pojďme ověřit, že nám to taky vyjde z teorie:

Spočítáme parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

Obě jsou nulové jen v bodě $(0,0)$.

Spočítejme Hessovu matici:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

V bodě $(0,0)$ má jedno kladné a druhé záporné vlastní číslo, tedy dostáváme, že se jedná o sedlový bod.

(c)

$$f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

Řešení: Spočítáme parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{50}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{20}{y^2}$$

Položíme je rovné nule, vyjádříme y a dosadíme ho do druhé rovnice. Dostáváme $x - \frac{20}{2500}x^4 = 0$, řešením jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. To první řešení je ale mimo definiční obor. Máme tedy pouze jediný podezřelý bod: $(5,2)$.

Spočítejme Hessovu matici:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix}$$
$$H(5,2) = \begin{pmatrix} \frac{100}{5^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{2^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že funkce f má v bodě $(5,2)$ lokální minimum.

2. **Vyšetřete extrémy funkcí za daných podmínek:**

(a)

$$f(x,y) = xy$$

na množině

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$$

Řešení: Řešení je hned několik, liší se v obtížnosti:

i. Jeden nápad by bylo vyjádřit jednu proměnnou jako funkci té druhé, dosadit a optimalizovat funkci jedné proměnné:

$$x = \pm\sqrt{2 - y^2}$$
$$f(y) = \pm y\sqrt{2 - y^2}$$

Pečlivý čtenář zkusí tento postup.

ii. Nebo bychom mohli přejít do polárních souřadnic, pak pracujeme na množině $r = \sqrt{2}, t \in [0, 2\pi]$. Dostáváme:

$$x = \sqrt{2}\cos(t)$$
$$y = \sqrt{2}\sin(t)$$
$$f(t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

Pečlivý čtenář zkusí i tento postup.

iii. Nebo použijeme teorii z přednášky: hledáme extrémy funkce $f(x,y)$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$. Tedy pokud je bod (a_1, a_2) extrémem, pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ taková, že platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(a_1,a_2) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(a_1,a_2) = 0$$

Spočítejme parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Vzpomeneme si na podmínky věty:

A. f, g jsou funkce definované na otevřené množině (všude) a mají na ní spojité parciální derivace. Splněno.

B. Matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

má nejvyšší možnou hodnost (tj. jedna) v každém bodě otevřeného mezikruží obsahujícího množinu $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=2\right\}$. Splněno pro všechna (x,y) taková že $x^2+y^2=2$.

Tedy existuje číslo λ, že platí obě následující rovnice zároveň:

$$\begin{aligned} y + \lambda 2x &= 0 \\ x + \lambda 2y &= 0 \end{aligned}$$

Můžeme vyjádřit a dosadit:

$$\begin{aligned} y &= -\lambda 2x \\ x + \lambda(-\lambda 4x) &= 0 \\ x(1-4\lambda^2) &= 0 \end{aligned}$$

Což má řešení pokud $x=0$ nebo $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

- První řešení $x=0$: První řešení nemůže nastat, protože musí zároveň platit

$$\begin{aligned} y + \lambda 2 \cdot 0 &= 0 \\ y^2 + 0^2 &= 2 \end{aligned}$$

- Druhé řešení $\lambda = \pm\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} x &= \pm y \\ x^2+y^2 &= 2 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Tato řešení nám dávají lokální extrémy:

A. $f(1,1) = f(-1,-1) = 1$ jsou maximy funkce.

B. $f(-1,1) = f(1,-1) = -1$ jsou minimy funkce.

Všimneme si, že všude jinde je absolutní hodnota funkce $|f(x,y)| < 1$.

3. **Budeme optimalizovat stan. Stan má tvar vrchlíku (to, co dostaneme z koule, když z ní kus uřízneme rovným nožem). Chceme použít přesně $10m^2$ látky (stříháním si nedělejte hlavu, zajímá nás ve skutečnosti hmotnost...). Látku musíme použít na podlahu (kruh o poloměru r_1) a kupoli, která slouží jako střecha. Chceme aby stan měl co největší objem.**

   Pozor na to, že jsem v řešení špatně opsal vzorečky: `https://cs.wikipedia.org/wiki/Kulov%C3%A1_%C3%BAse%C4%8D`**. TODO dopočítat**

   Řešení: Budeme používat následující značení:

   - S je povrch stanu – kolik látky tvoří výsledný stan.
   - h je výška stanu (od podlahy k nejvyššímu bodu).
   - r je poloměr pomyslné koule, ze které jsme uřízli vrchlík.
   - $r_1 = \sqrt{h(2r-h)}$ je poloměr podlahy.

   Povrch a objem stanu je

$$S(r,h) = \pi h(2r-h) + 2\pi rh = 4\pi rh - \pi h^2 = 10$$
$$V(r,h) = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + h^2) = \frac{1}{6}\pi h(3h(2r-h) + h^2) = \pi h(6rh - 2h^2)$$

   Tedy hledáme extrémy $V(r,h)$ za podmínky $g(r,h) = S(r,h) - 10 = 0$. Implicitně máme podmínku $h \leq r$ (z geometrie problému), to se ve skutečnosti promítlo už na vzorcích pro objem a povrch.

   Spočítáme parciální derivace:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 6\pi h^2$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = 12\pi rh - 6\pi h^2$$
$$\frac{\partial g}{\partial r} = 4\pi h$$
$$\frac{\partial g}{\partial h} = 4\pi r - 2\pi h$$

   Podmínky věty: parciální derivace vyšly spojité všude, funkce je definovaná na otevřené množině (všude) a matice parciálních derivací podmínky má pro všechny přípustné body hodnost jedna.

   Víme, že musí platit:

$$6\pi h^2 + \lambda 4\pi h = 0$$
$$12\pi rh - 6\pi h^2 + \lambda(4\pi r - 2\pi h) = 0$$

   vydělíme 2π

$$3h^2 + 2\lambda h = 0$$
$$6rh - 3h^2 + \lambda(2r-h) = 0$$

   Jednoduché řešení první rovnice je $h = 0$ a z podstaty problému tohle bude nejspíš minimum (stan vysoký nula, jen jsme použily dva kruhy látky o celkové ploše $10m^2$, ale žádný objem). Z první rovnice máme

$$3h + \lambda \neq 0$$

můžeme tedy z druhé rovnice vyjádřit r a z první λ:

$$\begin{aligned} r(6h + 2\lambda) &= 3h^2 - \lambda \\ \lambda &= -\frac{2h}{2} \end{aligned}$$

Dosadíme a dostaneme:

$$\begin{aligned} r &= \frac{3h^2 - \lambda}{6h + 2\lambda} \\ &= h + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jen poznamenejme, že toto je poměrně překvapivý výsledek. Já bych čekal, že maximem bude polokoule, ale není tomu tak:

$$\pi h(6h^2 - 2h^2) = \pi 4h^3 \qquad \text{(polokoule } r = h\text{)}$$

$$\pi h\left(6\left(h + \frac{1}{2}\right)h - 2h^2\right) = \pi h(6h^2 + 3h - 2h^2) = \pi 4h^3 + 3h^2 \qquad \text{(náš extrém)}$$

Pro jistotu (jestli je to opravdu extrém) dopočítáme objem. Tedy jen z dané plochy vyjádříme poloměr a výšku a objem necháme na laskavém čtenáři.

$$\begin{aligned} 4\pi(h + 0.5)h - \pi h^2 &= 10 \\ h_1 &\approx -1.41599 \\ h_2 &\approx 0.749323 \end{aligned}$$

Z čehož je jen jedno řešení "fyzikální."

$$\begin{aligned} h &\approx 0.749323m \\ r &\approx 1.249323m \end{aligned}$$

Což sice není úplně obvyklý rozměr stanu, ale ani nijak přehnaně nerealistický.

4.

(a) **Maximalizujte funkci $2x^2 + 12xy - 3y^2$ na jednotkové kružnici.**

Řešení: Hledáme extrém funkce f za podmínky $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Spočítáme parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 12y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12x - 6y$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Ověříme předpoklady a dle věty nám vyjde, že musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$ tak že platí obě následující rovnice:

$$4x + 12y + \lambda 2x = 0$$
$$12x - 6y + \lambda 2y = 0$$

Pokud jedna proměnná x nebo y je nulová, tak vidíme že i ta druhá musí být nulová.

(b) **Nechť je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická matice. Maximalizujte funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danou $f(x) = x^T Ax$ na jednotkové kružnici ($x^T x = 1$).**

Řešení: Akorát spočítáme to samé obecně. Možná si říkáte, že by se nám hodilo pravidlo pro nějaký součin funkcí. Tak takové pravidlo pojďme zkusit vymyslet pomocí řetízkového pravidla. Pro připomenutí:

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

definujeme matici tvaru $m \times n$ (pro jedinou funkci máme jediný řádek):

$$(Df)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

pak dostáváme parciální derivace násobením matic – řetízkové pravidlo (za předpokladu, že se vše chová hezky, viz skripta):

$$(Df \circ g)(t) = (Df)(g(t))(Dg)(t)$$

Pojďme tedy vymyslet, jak se dá spočítat Jakobián f pomocí řetízkového pravidla (nebo rovnou vymysleme, jak to dopadne pro nějaký součin funkcí).

Vzpomeňte si na větu z lineární algebry, že symetrické reálné matice mají reálná vlastní čísla a navíc ortogonální vlastní vektory.

3.7 Cvičení

1. **Aproximujte následující funkce:**

   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **pro připomenutí v jedné proměnné Definice 2.6.**

   i. $f(x) = \sin(x)$ **pro** $a = 0$**:**

   Řešení:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

   (konverguje všude, tak píšu rovnítko)

   ii. $f(x) = e^x$ **pro** $a = 0$**:**

   Řešení:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

   (konverguje všude, tak píšu rovnítko)

   iii. $f(x) = \ln(1+x)$ **pro** $a = 0$**:**

   Řešení: Taylorova řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

   (konverguje pro $x \in (-1, 1]$, tak nepíšu rovnítko)

   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **kde** $f(x,y) = xe^{x+y}$ **na okolí bodu** $(0,0)$**.**

   Řešení: Začneme zlehka a spočítáme napřed Taylorův polynom stupně dva.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= xe^{x+y}\\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x+y} + xe^{x+y}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xe^{x+y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2e^{x+y} + xe^{x+y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= e^{x+y} + xe^{x+y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= e^{x+y} + xe^{x+y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= xe^{x+y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 1\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 2\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= 1\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= 1\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2^{f,(0,0)}(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right)\\ &= x + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2xy\right)\end{aligned}$$

Ověřte, že se rovnají parciální derivace funkcí f a $T_2^{f,(0,0)}$ v bodě $(0,0)$!

Vzhledem k tomu, jak je to tak hezká funkce, tak můžeme i určit libovolnou parciální derivaci. Budeme používat $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, neboť obě jsou definovány a spojité všude.

Pro libovolná čísla $m, n \in \mathbb{N}$ můžeme matematickou indukcí dokázat vztahy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y) &= xe^{x+y}\\ \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y) &= ne^{x+y} + xe^{x+y}\\ \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}(x,y) &= ne^{x+y} + xe^{x+y}\\ \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}(0,0) &= n\end{aligned}$$

Tedy dostáváme Taylorovu řadu:

$$\begin{aligned}T^{f,(0,0)}(x,y) &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!}\frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(0,0)x^j y^k\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} j x^j y^k\\ &= x + x^2 + xy + \frac{x^3}{2} + x^2 y + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + \dots\end{aligned}$$

Tímto zkoumání Taylorovy řady samozřejmně nemá končit. Měli bychom určit chybu (vzpomeňte například na Lagrangeův tvar zbytku). Také bychom měli aspoň zkusit určit poloměr konvergence (což jsme nedělali ani v minulém semestru).

(c) Jde aproximovat i funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Řešení: Nic moc se nezmění, odhadujeme každou složku zvlášť. Akorát máme víc indexů.

2.

(a) **Definujte, kdy je funkce spojitá.**

Řešení: Definice 2.3

Nechť $(X, d), (Y, d')$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité* pokud:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(b) **Definujte, kdy je funkce stejnoměrně spojitá.**

Řešení: Nechť $(X, d), (Y, d')$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité* pokud:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall y \in X : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Obdélníček všude `http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/animace/k0021/spojitost/spojitost.html`

(c) **Rozmyslete, že každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá.**

(d) **Vzpomeňte si, že pokud je funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak je stejnoměrně spojitá na tomto intervalu.**

Řešení: Věta XI.3.1.2, rozmyslete si, že ten samý důkaz projde pro jakýkoliv definiční obor, který je kompaktní.

Toto se použije v důkazu, že každá spojitá funkce má na uzavřeném intervalu Riemannův integrál.

(e) **Jsou následující funkce spojité nebo dokonce stejnoměrně spojité?**

i. $f(x) = x$ **na** $\mathbb{R}$

Řešení: Funkce je stejnoměrně spojitá, stačí volit $\delta = \varepsilon$, pro libovolná dvě x, y že $d(x, y) = |x - y| < \varepsilon$ máme $d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta$.

ii. $f(x) = x^2$ **na** $\mathbb{R}$

Řešení:

A. **Funkce je spojitá.**

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$ můžeme volit $\delta = \frac{\varepsilon}{2x}$. Potom pro libovolné y takové, že $d(x, y) < \delta$ máme:

$$\begin{aligned} |x^2 - y^2| &< |x^2 - (x + \delta)^2| && \text{(tady je ta vzdálenost maximalizovaná)} \\ &= |x^2 - (x^2 + 2x\delta + \delta^2)| \\ &= |2x\delta + \delta^2| \\ &< |2x\delta| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

B. **Funkce není stejnoměrně spojitá.**

Pořádně znegujte definici stejnoměrné spojitosti!

- Zvolme $\varepsilon = 0.1$
- Pro libovolné $\delta > 0$

- Volme $x = 100\frac{\varepsilon}{\delta}$
- Volme $y = x + \frac{\delta}{2}$, takže $d(x, y) = \frac{\delta}{2} < \delta$.
-

$$
\begin{aligned}
|x^2 - y^2| &= \left| x^2 - \left(x + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right| \\
&= \left| x\delta + \frac{1}{4}\delta^2 \right| \\
&> x\delta \\
&= 100\varepsilon \\
&> \varepsilon
\end{aligned}
$$

Tedy kvadratická funkce není stejnoměrně spojitá na oboru reálných čísel.

iii. $f(x) = x^2$ **na** $[1, 5]$

Řešení: Funkce je tu stejnoměrně spojitá (a dle již zmíněné obecné věty by měla být). Pro dané $\varepsilon > 0$ volíme $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{12})$. Pak pro každé $x \in [1, 5]$:

$$
\begin{aligned}
|(x + \delta)^2 - x^2| &= |\delta(2x + \delta)| \\
&= \delta(2x + \delta) \\
&\leq \delta(2 \cdot 5 + 1) \\
&= 11\delta \\
&= \frac{11}{12}\varepsilon \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Rozmyslete pořádně, jak z tohoto plyne stejnoměrná spojitost!

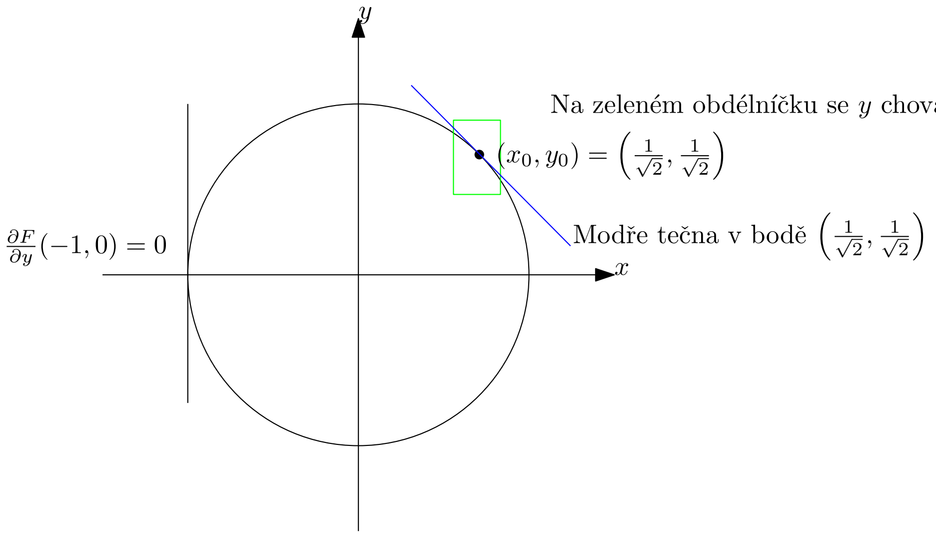
3. **Projděme si spolu obě věty o implicitní funkci na konkrétních příkladech.**

   (a) **„Jediné y“:**

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Řešení: Co chci je funkce f taková, že $y = f(x)$ na nějakém okolí řešení (x_0, y_0). Tedy vím, že $F(x_0, y_0) = 0$ a chci, aby na malinkém okolíčku platilo $F(x, f(x)) = 0$.

Obrázek 3.12.



Obrázek 3.12: Implicitní funkce (kružnice).

Mohli jsme řešit celkem postaru a najít $f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Vidíme, že to splňuje $F(x, f(x)) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 - 1 = 0$. Ale nám vadí nejednoznačnost. Naštěstí v malém okolíčku jednoho řešení se $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ chová jako funkce.

Naopak tam, kde $\frac{\partial F}{\partial y}$ vyjde nula, tam nám věta nezaručí existenci funkce f (viz bod $(-1, 0)$, kde opravdu nemůžeme najít zelený obdélníček).

Věta nám ale navíc zaručila i derivaci funkce f. Tedy se můžeme ptát na to, jaká je směrnice tečny kružnice v bodě $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Mohli bychom ji spočítat jako $f'(x)$ (a zkuste si, že to i takto vyjde stejně), ale to by bylo příliš pracné. Dle věty:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x)) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1}$$

To se nezdá, že jsme si pomohli, tedy aspoň dokud to nerozepíšeme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^{-1} \\ &= -\frac{2\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= -1\end{aligned}$$

3blue1brown mluví o implicitní diferenciaci intuitivně `https://www.youtube.com/watch?v=qb40J4N1fa4`. To video doporučuji, ale mějte na paměti, že my jsme z věty z přednášky dostali mnohem víc, než implicitní diferenciaci. Dostali jsme i aplikaci na určování extrémů pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

Rozmyslete si, jak tohle vše vypadá pro ještě jednodušší příklad jiné funkce, kdy $F(x, y) = xy = 0$.

(b) „Dvě y“:

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2) &= x^2 + y_1^2 + y_2^2 - 3 = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2) &= x + y_1 - 2y_2 = 0 \end{aligned}$$

konkrétně kolem řešení $(x, y_1, y_2) = (1, 1, 1)$**.**

Řešení: Spočítáme si Jacobiho matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že na nějakém malém okolí bodu $(x, y_1, y_2) = (1, 1, 1)$ má tato matice plný rank.

Navíc $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(1, 1, 1) = -2$, takže je nenulový a můžeme najít y_2 jako funkci (x, y_1) pomocí věty „o jednom y.“ Tedy funkce $F_2(x, y_1, y_2)$ nám dá nějakou mezifunkci $y_2 = \psi(x, y_1) = \frac{1}{2}(x + y_1)$ (snadno jsme vyjádřili z lineární rovnice). Tuto funkci ψ můžeme dosadit za y_2 do funkce F_1:

$$\begin{aligned} G(x, y_1) &= F_1(x, y_1, \psi(x, y_1)) \\ &= x^2 + y_1^2 + \left(\frac{1}{2}(x + y_1)\right)^2 - 3 \end{aligned}$$

Funkce G má také jediné y, takže můžeme zase použít jednoypsilonovou verzi věty (a dopočítat kvadratickou rovnici – na okolíčku bude mít jednoznačné řešení). Dostáváme:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) \\ &= \end{aligned}$$

a můžeme dopočítat i druhé y čistě jako funkci x:

dopočítat

$$\begin{aligned} y_2 &= f_2(x) \\ &= \psi(x, f_1(x)) \\ &= \frac{1}{2}(x + f_1(x)) \\ &= \end{aligned}$$

dopočítat

Pro první použití věty s jedním y jsme potřebovali:

- Spojitost parciálních derivací napřed F_2, pak i F_1.
- $$\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(1, 1, 1) = -2 \neq 0$$

  (tady jsme mohli napřed řešit pro jiné y, pokud by zrovna tohle bylo nulové – odpovídá hledání nenuly v posledním sloupci Jacobiho matice v důkazu obecné věty).

- Aby i funkce G měla nenulovou parciální derivaci podle y:

$$\begin{aligned} 0 &\neq \frac{\partial G}{\partial y_1}(1,1) \\ \frac{\partial G}{\partial y_1}(x,y_1) &= \frac{\partial}{\partial y_1} F_1(x,y_1,\psi(x,y_1)) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,y_1,\psi(x,y_1)) + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x,y_1,\psi(x,y_2))\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(x,y_1) \end{aligned}$$

- Z prvního použití jednoypsilonové věty nám vypadlo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(x,y_1) = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x,y_1,y_2)\right)^{-1}\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x,y_1,y_2)$$

(pozor, tady byl ve starší verzi skript překlep, ψ jsme určovali pouze pomocí F_2 a z jednoypsilonové věty nám vypadne toto).

- Zkusíme zapsat tu druhou podmínku kultivovaněji:

$$\begin{aligned} 0 &\neq \frac{\partial G}{\partial y_1}(1,1) \\ 0 &\neq \frac{\partial F_1}{y_1}(1,1,\psi(1,1)) + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(1,1,\psi(1,1))\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(1,1) \\ &= \frac{\partial F_1}{y_1}(1,1,\psi(1,1)) + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(1,1,\psi(1,1))\left(-\left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(1,1,1)\right)^{-1}\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(1,1,1)\right) \end{aligned}$$

Vynásobíme nenulou:

$$0 \neq -\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(1,1,1)\frac{\partial F_1}{y_1}(1,1,\psi(1,1)) + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(1,1,\psi(1,1))\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(1,1,1)$$

Z tohoto nejsme moc šťastní, Jacobiho determinant se měl počítat přímo v bodě $(1,1,1)$, nikoliv někde v $(1,1,\psi(1,1))$. Ale uvědomme si, že nutně $\psi(1,1) = 1$, jelikož je to funkce a přímo v našem původním řešení by nám měla doplnit trojici na základě dvojice. Dostáváme tedy přímo podmínku věty (zde zapsáno jako minus determinant Jacobiho matice je nenulový):

$$0 \neq -\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(1,1,1)\frac{\partial F_1}{y_1}(1,1,1) + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(1,1,1)\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(1,1,1)$$

Ukázat ještě jeden příklad na vázané extrémy.

3.8 Cvičení

1. **Dávejte pozor na to, kdy můžete limitní objekt uchopit a kdy ne! Definujme metrický prostor (X, d), kde X jsou všechny spojité funkce na uzavřeném intervalu $[0, 2]$:**

$$X = \{f : [0, 2] \to \mathbb{R} \mid f \textbf{ je spojitá}\}$$

Metriku definujeme postupně.

Ukažte, že:

(a) Následující je skalární součin:

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^2 f(x)g(x)\ dx$$

Řešení: Dle definice skalární součin je funkce $\|.\| : V \times V \to \mathbb{R}$, kde V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, která splňuje:

i. $\int_0^2 f(x)g(x)\ dx$ je reálné číslo (součin spojitých funkcí je spojitá funkce, dle věty z přednášky má na uzavřeném intervalu Riemannův integrál)

ii. $\langle f \mid g \rangle = \langle g \mid f \rangle$ neboť násobení reálných čísel komutuje

iii. $\langle f+g \mid h \rangle = \langle f \mid h \rangle + \langle g \mid h \rangle$ vlastnost určitého integrálu (věta z minulého semestru)

iv. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \langle \alpha f \mid g \rangle = \alpha \langle f \mid g \rangle$ věta z minulého semestru

v. $\forall f \in X \setminus \{0\} : \langle f \mid f \rangle > 0$ skalární součin nenulové funkce sama se sebou je kladný: domácí úkol

(b) Následující je norma daná skalárním součinem:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$$

Řešení: Připomeňme větu z lineární algebry: norma indukovaná skalárním součinem je norma. Dle definice norma je funkce $\|.\| : V \to \mathbb{R}$, kde V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, která splňuje:

i. $\forall f \in V : \|f\| \geq 0$, rovnost pouze pokud $f = 0$ (konstantní nulová funkce)

ii. $\forall f \in V : \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

iii. $\forall f, g \in V : \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

(c) Následující je metrika daná normou:

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

Řešení: Metrika je funkce $d : X \times X \to \mathbb{R}$, která splňuje:

i. $\forall f, g \in X : d(f, g) \geq 0$, rovnost pouze $f = g$

ii. $\forall f, g \in X : d(f, g) = d(g, f)$

iii. $\forall f, g, h \in X : d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$

(d) Ukažte, že $f_n \in X$ kde f_n je definovaná pro $n \in \mathbb{N}^+$ (kladná celá čísla) jako:

$$f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{pro } x \in [0, 1 - 1/n) \cup (1 + 1/n, 2] \\ nx + 1 - n & \textbf{pro } x \in [1 - 1/n, 1) \\ -nx + 1 - n & \textbf{pro } x \in [1, 1 + 1/n] \end{cases}$$

(e) Ukažte, že funkce f definovaná jako:

$$f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

nepatří do X ($f \notin X$, tedy není spojitá).

(f) Ukažte, že pokud bychom definovali g_n:

$$g_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{pro } x \in [0, 1 - 1/n) \cup (1 + 1/n, 2] \\ n^2x + n - n^2 & \textbf{pro } x \in [1 - 1/n, 1) \\ -n^2x + n - n^2 & \textbf{pro } x \in [1, 1 + 1/n] \end{cases}$$

i. $g_n \in X$ **(je spojitá)**

ii. $\int_0^2 g_n(x)\ dx = 1$

iii. následující není funkce:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

(g) Najděte posloupnost funkcí $h_n \in X$ takovou, že:

$$\forall x \in [0,2]\colon \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$$
$$\|h_n\| = 1$$

Tedy tyto funkce sice v každém bodě konvergují k nulové funkci, ale jako posloupnost nekonvergují v (X, d).

(h) Jak by předchozí úvahy dopadly, kdybychom brali (X', d'), kde $X' = \{f\colon [0,2] \to \mathbb{R}\}$, $d'(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,2]\}$?

2. **Spočítejte integrál $\int_0^1 x^2\ dx$ dle definice Riemannova integrálu.**

Řešení: **Napřed spočítáme spočítáme pomocí Newtonova integrálu (abychom měli kontrolu, že nám to vyjde dobře):**

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\ dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 0 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Spočítáme, co vyjde pro hezká podrozdělení: Budeme volit podrozdělení:

$$\begin{aligned}P_n &= (t_0, t_1, \dots, t_n) \\ t_j &= \frac{j}{n} \\ t_0 &= 0 \\ t_n &= 1\end{aligned}$$

Jemnost podrozdělení P_n je $\mu(P_n) = \max_j(t_j - t_{j-1}) = \frac{1}{n}$.

Dolní součty přes podrozdělení (napřed obecně pro podrozdělení na n intervalů, pak pro náš případ):

$$\begin{aligned}s(f, P) &= \sum_{j=1}^{n} \inf \{f(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\} (t_j - t_{j-1}) \\ s(x^2, P_n) &= \sum_{j=1}^{n} t_{j-1}^2 (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Horní součty přes podrozdělení (napřed obecně pro podrozdělení na n intervalů, pak pro náš případ):

$$\begin{aligned}S(f, P) &= \sum_{j=1}^{n} \sup \{f(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\} (t_j - t_{j-1}) \\ S(x^2, P_n) &= \sum_{j=1}^{n} t_j^2 (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Vidíme, že $S(x^2, P_n) - s(x^2, P_n) = \frac{1}{n}$, takže pro zvětšující se n budou tyto hodnoty konvergovat jedna k druhé.

Zbývá ukázat, k čemu konverguje posloupnost horních součtů:

$$\begin{aligned}S(x^2, P_n) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{n \to \infty} S(x^2, P_n) = \frac{1}{3}$$

Poznámka, pokud si nepamatujete vzoreček pro součet mocnin prvních n celých čísel, pak stačí věřit (a pak dokázat matematickou indukcí), že je to polynom o jedna většího stupně: Pro $k \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{j=0}^{n} j^k = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k + a_{k+1} n^{k+1}$$

koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_{k+1} \in \mathbb{R}$ dopočítáme jako řešení soustavy rovnic (spočítáme prvních $k+1$ výsledků ručně). Umíte tento postup zrychlit? Nápověda: umíte určit koeficienty a_0, a_{k+1}?

Intuice proč Newtonův a Reimannův integrál často dává to samé: Všimněte si, že pokud definujeme funkci $F(t) = \int_0^t x^2\, dx$, pak (píšu parciální derivaci, ale mohl bych psát i tu běžnou, protože se jedná o funkci jedné proměnné):

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

intuitivně si člověk může představit, že $h = \frac{1}{n}$ a místo F ve zlomku brát $s(x^2, P_n)$. Pak samozřejmně dostaneme, že $\frac{\partial}{\partial t} F(t) = x^2$. Vizuálně: pokud posuneme pravou mez intervalu o malinko, pak zvětšíme plochu právě o jeden obdélníček. Konkrétně pro konkrétní h vyjde zlomek z definice derivace jako rozdíl dvou částečných součtů (tedy poslední obdélníček) děleno jeho šířkou (tedy vyjde hodnota té integrované funkce) (viz Obrázek 3.13).

Pořádně toto máte dokázané pomocí integrální věty o střední hodnotě (díky té nemusíme brát dolní součty, ale existuje nějaký bod, že můžeme brát přímo hodnotu integrované funkce v tomto bodě). Srovnejte integrální větu o střední hodnotě s Lagrangeovou větou!

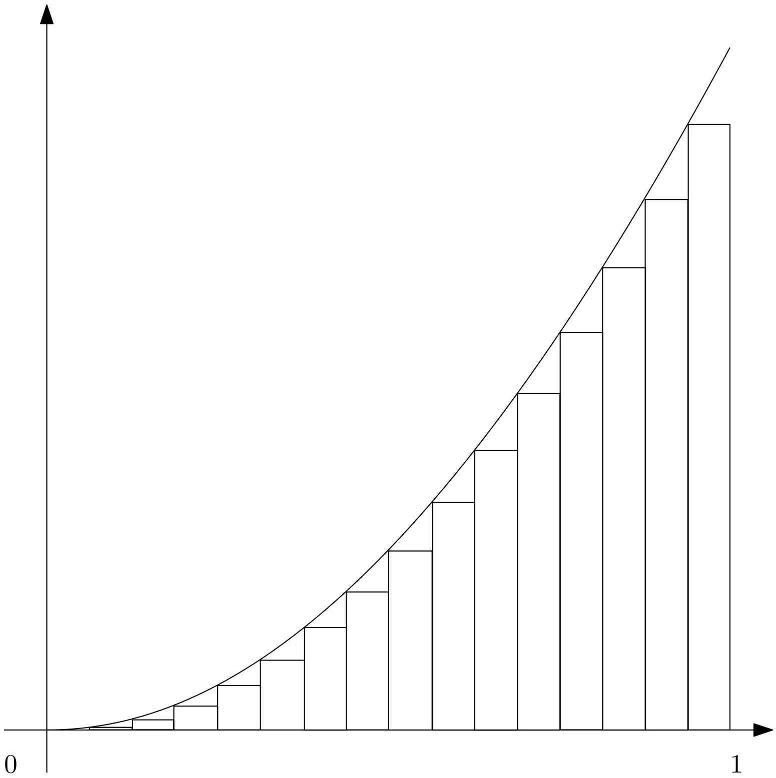
obrázek integrální věty o střední hodnotě vs Lagrangeovy věty

Co ostatní podrozdělení:

- x^2 je spojitá funkce
- Každá spojitá funkce je na uzavřeném intervalu i stejnoměrně spojitá
- Chceme aby $S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$
- Ze stejnoměrné spojitosti vezmeme δ, že $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
- Vezmeme dost jemné podrozdělení: $\mu(P) < \delta$
- Z definice horních a dolních součtů dostanu $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$

Tím, že druhá mocnina je na intervalu $[0, 1]$ stejnoměrně spojitá jsme dokázali, že má Riemannův integrál. Takže i horní / dolní součty pro jemnější a jemnější podrozdělení budou konvergovat k naší spočítané hodnotě.

K důkazu toho samého jsme mohli také použít větu, že pro libovolné podrozdělení vyjdou dolní součty nejvýše tolik jako horní součty (takže supremum a infimum přes libovolné podrozdělení se budou rovnat naší limitě).



Obrázek 3.13: Riemannův integrál – dolní součty

3. **Spočítejte následující integrály.**

   (a) $\int e^x \sin(x)\ dx$

   Řešení: Vzpomeneme si na metodu řešení integrálů per-partes (po částech). Ta intuitivně pochází z vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \int (f(x)g(x))'\ dx &= \int f'(x)g(x)\ dx + \int f(x)g'(x)\ dx \\ f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x)\ dx + \int f(x)g'(x)\ dx \\ \int f'(x)g(x)\ dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx\end{aligned}$$

   Často se také píše pomocí malých a velkých písmen:

$$\begin{aligned}F' &= f \\ G' &= g \\ \int f(x)G(x)\ dx &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\ dx\end{aligned}$$

   Použijeme per-partes dvakrát, vždy budeme derivovat e^x a integrovat tu goniometrickou funkci:

$$\int e^x \sin(x)\ dx = e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x))\ dx$$

$$
\begin{aligned}
&= e^x(-\cos(x)) + \int e^x \cos(x)\ dx \\
&= e^x(-\cos(x)) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\ dx
\end{aligned}
$$

Zatím nevíme, jestli ten integrál existuje (vyšel nám na jedné straně i na druhé straně). Kdyby existoval, tak snadno dopočítáme, že:

$$\int e^x \sin(x)\ dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C \qquad \text{(nezapomeňte na integrační konstantu)}$$

Díky krásné větě o jednoznačnosti derivace ověříme, že to, co nám vyšlo je skutečně Newtonův integrál:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C\right)' &= \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) \\
&= e^x \sin(x)
\end{aligned}
$$

(b) $\int \frac{1}{x\ln(x)}\ dx$

Řešení: Vzpomeneme si na metodu počítání substitucí. Obdobně jako per-partes vyjdeme ze vztahu pro derivaci složené funkce:

$$
\begin{aligned}
(F(\phi(x)))' &= F'(\phi(x))\phi'(x) \\
\int (F(\phi(x)))'\ dx &= \int F'(\phi(x))\phi'(x)\ dx \\
F(\phi(x)) &= \int F'(\phi(x))\phi'(x)\ dx
\end{aligned}
$$

Naše vnější funkce bude $F(x) = \frac{1}{x}$, naše vnitřní funkce bude $\phi(x) = \ln(x)$, derivace vnitřní funkce je $\phi'(x) = \frac{1}{x}$. Tedy máme:

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\ dx = \ln(\ln(x)) + C$$

(c) $\int_1^e \ln(x)\ dx$

Řešení: Použijeme per partes pro určitý integrál, tedy nemusíme měnit odkud kam integrujeme. Obecně per partes vypadá:

$$\int_a^b fG = [FG]_a^b - \int_a^b Fg$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^e \ln(x)\ dx &= \int_1^e 1 \cdot \ln(x)\ dx \\
&= [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\ dx \\
&= [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1\ dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e - 0 - e + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(d) $\int_0^{\pi/2} \sin^7(x)\cos(x)\ dx$

Řešení: Mohli bychom nejspíš zkoušet per partes, ale kdo ví, jestli bychom se někam dostali a jak dlouho by to trvalo. Použijeme substituci pro určitý integrál, pozor, že tady se mění odkud kam se integruje!

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx$$

Konkrétně tedy máme:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^7(x)\cos(x)\ dx &= \int_0^1 x^7\ dx \\
&= \left[\frac{x^8}{8}\right]_0^1 \\
&= 1/8
\end{aligned}
$$

(e) Rozložte na parciální zlomky:

i. $\frac{1}{x(x-1)}$

Řešení: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

postup – buď dosadím x, kde je definované, nebo pak zpětně ověřím, co mi vyšlo

ii. $\frac{4}{(x+2)(2x+1)}$

Řešení: $\frac{8}{3(2x+1)} - \frac{4}{3(x+2)}$

iii. $\frac{x^3}{(x-2)^2}$

Řešení: $x + 4 + \frac{12}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$

Řešení: Připomeňme tabulku integrálů parciálních zlomků, tedy pro každé $c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ máme:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-c}\ dx &= \ln(x-c) \\
\int \frac{1}{(x-c)^n}\ dx &= -\frac{1}{(n-1)(x-c)^{n-1}} \\
\int \frac{1}{1+x^2}\ dx &= \arctan(x) \\
\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx &= I_n \\
I_{n+1} &= \frac{1}{2n(1+x^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n
\end{aligned}
$$

Pozor, že kvůli čitelnosti jsme nepsali integrační konstantu $+C$.

Každý podíl dvou polynomů můžeme zapsat jako lineární kombinaci parciálních zlomků (výrazů zhruba typu nahoře). Díky rozkladu na parciální zlomky tedy můžeme počítat spoustu integrálů.

3.9 Cvičení

1. **Nejspíš jste slyšeli, že některé integrály „neumíme spočítat" (některé funkce nemají primitivní funkci vyjádřitelnou jako kombinaci nám známých funkcí).**

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\ dx$$

je takzvaná chybová funkce. (Tato funkce má ohromné použití ve statistice, pravděpodobnosti, i parciálních diferenciálních rovnicích.) Je spojitá (složení spojitých funkcí), takže dle věty z přednášky ten integrál existuje. Spočítejte Taylorův polynom v nule a integrujte ho.

Řešení: Spočítáme napřed n-tou derivaci:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2} &= -2e^{-x^2} x \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-x^2} &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \\
\frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-x^2} &= -4e^{-x^2} x(2x^2 - 3)
\end{aligned}$$

Dostaneme Taylorův polynom v nule:

$$1 - x^2$$

Pro úplnost doplňme, že kdybychom počítali o chvíli déle (v tom nám nikdo neumí zabránit), tak bychom dostali

$$1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \dots \qquad \text{(Taylorova řada } e^{-x^2} \text{ v nule)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} + \dots \right) \qquad \text{(Taylorova řada chybové funkce v nule)}$$

Pokud bychom spočítali Taylorovu řadu a formálně ji integrovali (dostali bychom řadu a každý její sčítanec bychom integrovali jako polynom). Pozor, že abychom řekli, že jsme takto dostali Taylorovu řadu chybové funkce, tak bychom museli ještě hodně dokazovat! Co všechno se na našem postupu mohlo pokazit?

Řešení: Jen pár nápadů, co bychom mohli chtít dokázat (kdybychom žili před spoustou let a chtěli vytvořit pořádnou teorii):

(a) Určení toho, kde Taylorova řada konverguje k funkční hodnotě (pozor, že to nemusí být stejné jako kde konverguje) pro funkci e^{-x^2} konverguje (pro jaký interval, nebo všude?)

(b) Nějakou teorii toho, že když máme Taylorovu řadu funkce f, tak jaká je Taylorova řada funkce $\int_0^t f(t)\ dt$.

(c) Kde to předchozí konverguje.

(d) Určení chyby Taylorova polynomu a podle toho určení chyby integrálu Taylorova polynomu.

(e) Určitě by se taky hodila teorie toho, jak určit Taylorovu řadu složené funkce (vraťte se k Taylorovu polynomu funkce e^{-x^2}).

(f) Taky by se nejspíš hodila teorie toho jak se skládá chyba a poloměr konvergence Taylorovy řady složených funkcí.

Jen poznamenejme, že Taylorova řada chybové funkce konverguje vždy (ale pro $x > 1$ opravdu pomalu). Ještě poznamenejme, že známe spoustu jiných aproximací chybové funkce (některé mají menší, některé větší chybu, některé jsou výhodnější pro některé aplikace, jiné pro jiné...).

2. **Taylorova řada v jedné proměnné ještě jednou:**

   (a) **Už víme, že Taylorova řada pro funkci** $\sin(x)$ **v nule konverguje pro každé reálné číslo.**

   (b) **Už víme, že Taylorova řada pro funkci** $\ln(1+x)$ **v nule konverguje jen pro** $x \in (-1, 1]$ **(jinde diverguje).**

   (c) **Určete Taylorovu řadu funkce**

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} && \text{(pokud } x \neq 0\text{)}
\end{aligned}
$$

Řešení: Funkční hodnota v nule je nulová.

První derivace je

$$\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

V nule je tato funkce nedefinovaná (to nemusí znamenat, že derivace neexistuje, jak ukážeme tato funkce má v nule limitu). Počítejme tedy z definice:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} && (x = 1/h) \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \\
&= 0 && \text{(formálně jsme použili l'Hospitalovo pravidlo)}
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že dokonce i ta funkce byla i v nule spojitá (tedy všude).

Obdobně bychom mohli dopočítat i vyšší derivace (zkuste). Jednodušší bude uhodnout tvar n-té derivace a to bude e^{-1/x^2} krát nějaký podíl polynomů (rozmyslete).

Tedy Taylorova řada této funkce v nule je konstantně nulová (speciálně konverguje všude). Ale sama funkce je mimo nulu nenulová.

3. **Spočítejte následující integrál:**

(a)

$$\int_{0.0001}^{1} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx$$

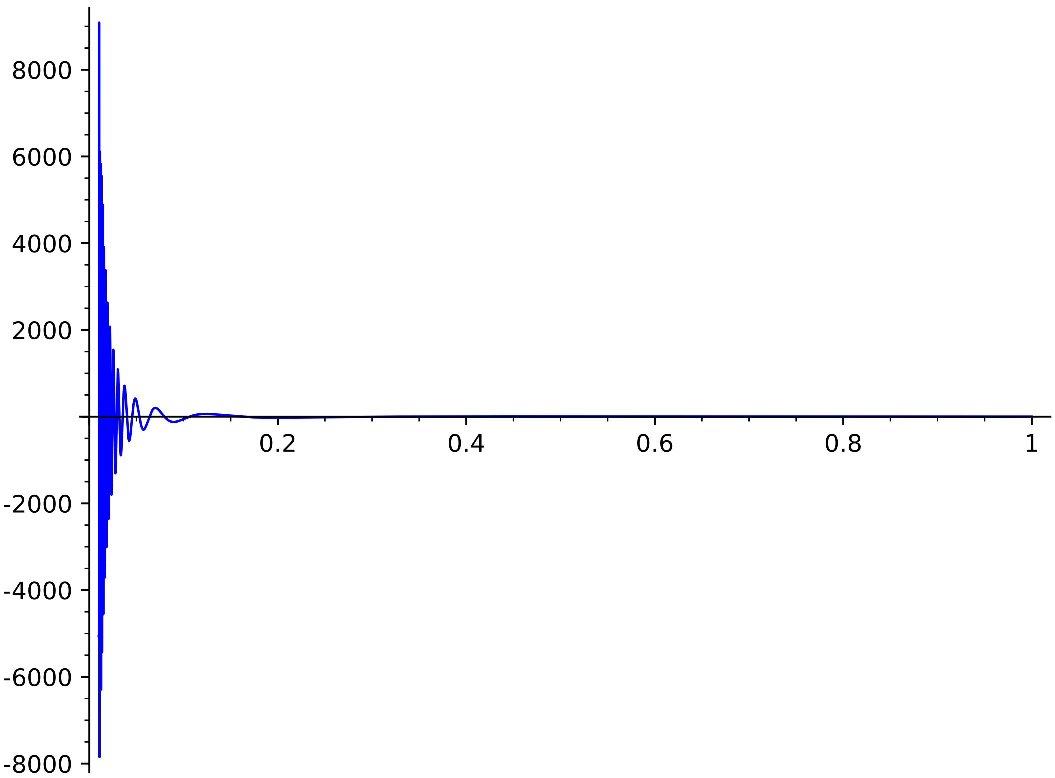
Řešení: S tužkou a papírem tento integrál spočteme hravě, stačí použít substituci:

$$\begin{aligned}
\int_{0.0001}^{1} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx &= \int_{10000}^{1} -\sin(x)\, dx \\
&= \int_{1}^{10000} \sin(x)\, dx \\
&= [-\cos(x)]_{1}^{10000} \\
&= [\cos(x)]_{10000}^{1} \\
&\doteq 1.49
\end{aligned}$$

Mohli jsme i spočítat primitivní funkci:

$$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx = \cos(1/x) + C$$

Viz Obrázek 3.14.



Obrázek 3.14: Některé funkce jsou malinko problematické pro numerické integrování funkce $\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ na intervalu $[0.01, 1]$.

(b) **Proč myslíte, že následující integrál půjde těžko spočítat programem z Vašeho domácího úkolu?**

Řešení: Jen namátkou:

i. Vysoké hodnoty

ii. Oscilace kladná a záporná čísla

iii. Obecně nejspíš nemůžeme čekat dobrý výsledek, pokud neexistuje Riemannův integrál

4. **Spočítejte následující integrály:**

   (a) **Chytré substituce – existují, je jich fakt hrozně moc. Já na nich rozhodně trvat nebudu.**

   (b) $\int (\ln(x))^2 \ dx$

   Řešení:

$$\begin{aligned}\int (\ln(x))^2 \ dx &= \int 1 \cdot (\ln(x))^2 \ dx \\ &= x\,(\ln(x))^2 - \int x 2\ln(x)\frac{1}{x} \ dx && \text{(první per partes)} \\ &= x\,(\ln(x))^2 - 2\int 1 \cdot \ln(x) \ dx \\ &= x\,(\ln(x))^2 - 2\left(x\ln(x) - \int x/x \ dx\right) && \text{(druhé per partes)} \\ &= x\,(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + C\end{aligned}$$

   (c) $\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} \ dx$

   Řešení:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} \ dx &= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)\cos^2(x)} \ dx \\ &= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)(1-\sin^2(x))} \ dx \\ &= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)(1-\sin^2(x))} \ dx\end{aligned}$$

   Na tohle už můžeme aplikovat substituci, tak si spočítáme „bokem“ integrál vnější funkce. Napřed spočítáme rozklad na parciální zlomky:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(1-x^2)} &= \frac{1}{x(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{(1-x)} + \frac{\gamma}{(1+x)} \\ \alpha &= 1 \\ \beta &= 1/2 \\ \gamma &= -1/2\end{aligned}$$

   a teď hurá na integrál vnější funkce:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(1-x^2)} \ dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{0.5}{(1-x)} - \frac{0.5}{(1+x)} \ dx \\ &= \int \frac{1}{x} \ dx + \int \frac{0.5}{(1-x)} \ dx - \int \frac{0.5}{(1+x)} \ dx \\ &= \ln(x) - 0.5\ln(1-x) - 0.5\ln(1+x) \\ &= \ln(x) - 0.5\ln((1-x)(1+x)) \\ &= \ln(x) - 0.5\ln(1-x^2) \\ &= \ln(x) - \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

Nakonec dopočítáme původní integrál:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\ dx &= \ln(\sin(x)) - \ln\left(\sqrt{1-\sin(x)^2}\right)\\ &= \ln(\sin(x)) - \ln\left(\sqrt{\cos(x)^2}\right)\\ &= \ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))\end{aligned}$$

5. **Ukažte, že:**

   (a) **funkce** $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & \textbf{pokud } x \in (0,1] \\ 0 & \textbf{pokud } x = 0 \end{cases}$$

   i. má Newtonův integrál

   Řešení:

$$F(x) = 2\sqrt{x}$$

   je na tomto intervalu primitivní funkcí

$$F(0^+) = 0$$
$$F(1^-) = 2$$
$$(N)\int_0^1$$

   ii. nemá Riemannův integrál

   Řešení: Supremum přes první interval podrozdělení bude vždy rovné nekonečnu. Jak dopadnou dolní součty?

   (b) **funkce signum** $sgn\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$**:**

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \textbf{pokud } x \in [-1,0) \\ 0 & \textbf{pokud } x = 0 \\ 1 & \textbf{pokud } x \in (0,1] \end{cases}$$

   i. nemá Newtonův integrál

   Řešení: Kdyby signum měla primitivní funkci F, tak ta F je spojitá (má derivaci), ale v nule má limitu z prava různou od funkční hodnoty.

   ii. má Riemannův integrál

   Řešení: Rozmyslete si, jak dopadnou horní a dolní součty.

   (c) **Jak s tím souvisí Darbouxova vlastnost?**

   Řešení: Zopakujme věty ze zimního semestru:

Věta 10.5 Spojitá funkce má primitivní funkci.

Věta 10.6 Funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost (nabývání mezihodnot).

Věta 11.2 Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má Newtonův určitý integrál.

Věta 12.6 Neklesající (nebo nerostoucí) funkce na uzavřeném intervalu má Riemannův určitý integrál.

Věta 12.7 Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má Riemannův určitý integrál.

Více opakování poznámky z přednášek z minulého semestru, Věta 12.11.

3.10 Cvičení

1.

(a) **Připomeňte znění věty o substituci pro jednu proměnnou.**

Řešení: Nechť $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě (α, β) derivaci. Nechť f je spojitá funkce na $J = \{\varphi(t) \mid t \in (\alpha, \beta)\}$, která má na jeho vnitřku newtonovský integrál. Pak

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx$$

(speciáně obě strany existují).

(b) **Intuitivně vysvětlete pomocí Riemannova integrálu rovnost následujících integrálů:**

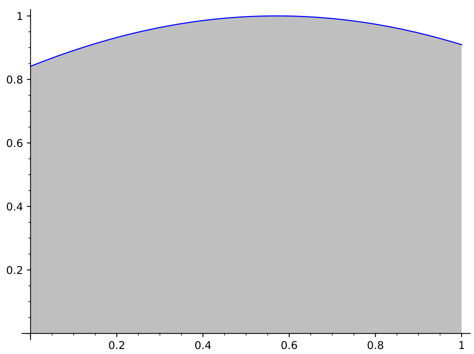
i.

$$\int_0^1 \sin(x+1)\ dx = \int_1^2 \sin(x)\ dx$$

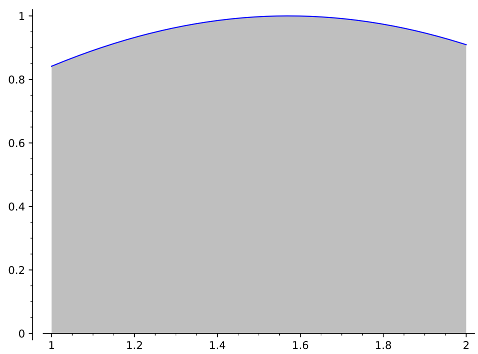
Řešení:

$$\int_0^1 \sin(x+1)\ dx = \int_1^2 \sin(x)\ dx$$
$$\varphi(t) = t+1$$
$$\varphi'(t) = 1$$

Představme si dolní (nebo horní) součet a příslušné podrozdělení. Pak každý interválek $[t_i, t_{i+1}]$ vlevo funkce φ zobrazí na $[t_i + 1, t_{i+1} + 1]$ (a tím ho neprodlouží).



Obrázek 3.15: Obrázek $\int_0^1 \sin(x+1)\ dx$.



Obrázek 3.16: Obrázek $\int_1^2 \sin(x)\ dx$.

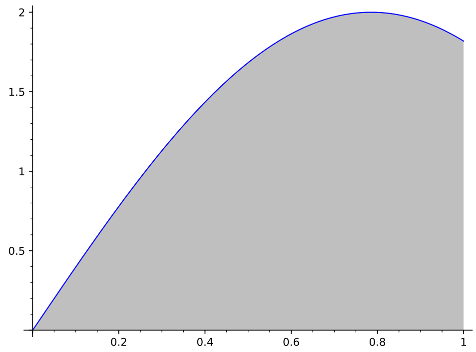
ii.

$$\int_0^1 \sin(2x)2\ dx = \int_0^2 \sin(x)\ dx$$

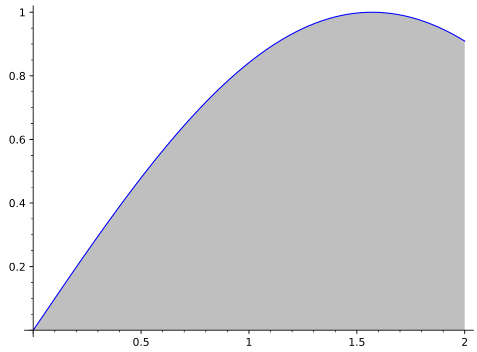
Řešení:

$$\int_0^1 \sin(2x)2\ dx = \int_0^2 \sin(x)\ dx$$
$$\varphi(t) = 2t$$
$$\varphi'(t) = 2$$

Představme si dolní (nebo horní) součet a příslušné podrozdělení. Pak každý intervalek $[t_i, t_{i+1}]$ vlevo funkce φ zobrazí na $[2t_i, 2t_{i+1}]$ (a tím ho dvakrát prodlouží).



Obrázek 3.17: Obrázek $\int_0^1 \sin(2x)2\ dx$.



Obrázek 3.18: Obrázek $\int_0^2 \sin(x)\ dx$.

iii.

$$\int_0^1 \sin(x^2)2x\ dx = \int_0^1 \sin(x)\ dx$$

Řešení:

$$\int_0^1 \sin(x^2)2x\ dx = \int_0^1 \sin(x)\ dx$$
$$\varphi(t) = t^2$$
$$\varphi'(t) = 2t$$

Představme si dolní (nebo horní) součet a příslušné podrozdělení. Pak každý intervalek $[t_i, t_{i+1}]$ vlevo funkce φ zobrazí na $[t_i^2, t_{i+1}^2]$ (a tím ho nějak prodlouží). Uvědomme si, že pokud bychom ten iterval psali jako:

$$[t_i, t_i + (t_{i+1} - t_i)] \mapsto [t_i^2, t_i^2 + 2t_i(t_{i+1} - t_i) + (t_{i+1} - t_i)^2]$$

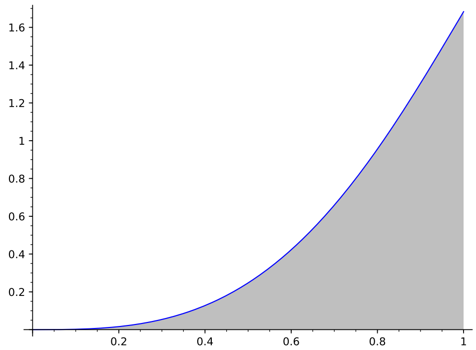
Pokud je rozdíl $t_{i+1} - t_i$ malinký, můžeme funkci φ aproximovat lineární funkcí, která interval $[t_i, t_i + (t_{i+1} - t_i)]$ zobrazí na interval $[t_i^2, t_i^2 + 2t_i(t_{i+1} - t_i)]$.

$$[t_i, t_i + (t_{i+1} - t_i)] \mapsto [t_i^2, t_i^2 + 2t_i(t_{i+1} - t_i)]$$

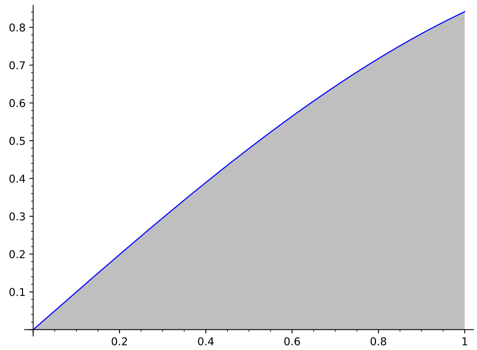
A tím ho $2t_i$ krát prodlouží:

$$\frac{(t_i^2 + 2t_i(t_{i+1} - t_i)) - t_i^2}{t_{i+1} - t_i} = \frac{2t_i(t_{i+1} - t_i)}{t_{i+1} - t_i} = 2t_i$$

Intuitivně pokud je $t_{i+1} - t_i$ malé, pak $(t_{i+1} - t_i)^2$ je zanedbatelné.



Obrázek 3.19: Obrázek $\int_0^1 \sin(x^2)2x\ dx$.



Obrázek 3.20: Obrázek $\int_0^1 \sin(x)\ dx$.

(c) Připomeňte, jak souvisí objem s determinanty.

Řešení: Objem rovnoběžnostěnu je absolutní hodnota determinantu, kde sloupce té matice jsou právě hrany rovnoběžnostěnu (viz skripta lineární algebry).

Pokud zobrazujeme nějaké těleso (ve fyzikálním smyslu, tedy nějaký útvar) lineárním zobrazením, pak jeho objem je absolutní hodnota determinantu lineárního zobrazení krát větší. Rozmyslete intuici na malinkatých kostičkách.

(d) Co se stane, když to těleso nedeformujeme lineárním zobrazením, ale zobrazením, které má spojité parciální derivace?

Řešení: Pokud uvažujeme zobrazení

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Pokud máte aspoň nějakou analýznickou intuici, pak nejspíš budete tvrdit, že v určitém bodě si to zobrazení aproximujeme lineárně (viz tvar totálního diferenciálu bez té chybové funkce μ). Malinká kostička se pak zobrazí na malinký rovnoběžnostěnek, který bude mít objem větší krát absolutní hodnota Jacobiho matice v tom daném bodě.

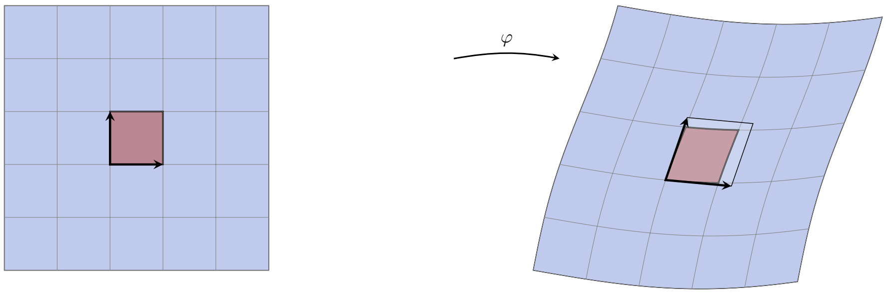
Pokud uvažujeme zobrazení

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pak pokud je f lineární, tak můžeme použít větu 9.21 ze skript Milana Hladíka: pokud je rovnoběžnostěn dán řádky matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pak jeho objem je $\sqrt{\det(AA^T)}$. Pokud by funkce f měla spojité parciální derivace, pak můžeme v předchozím vzorečku nahradit matici A Jacobiho maticí v každém bodě.

Graficky viz Obrázek 3.21[4].

[4] Obrázek upraven z `https://tex.stackexchange.com/questions/525437/can-this-curvy-region-be-replicated-in-tikz`



Obrázek 3.21: Nelineární zobrazení ve velkém přiblížení.

(e) **Jak z předchozího uhodnete tvar pro substituci pro vícerozměrný integrál?**

Řešení:

$$\int_U f(\varphi(u))|\det((D\varphi)(u))|\ du = \int_{\varphi(U)} f(v)\ dv$$

Kde přesné znění věty záleží na množství práce, kterou si s ní dáme. Speciálně v některých zněních se požaduje aby determinant Jacobiho matice byl vždy nenulový. Tento předpoklad je možné oslabit. Také je možné oslabit předpoklad toho, že φ má spojité parciální derivace (stačí definované a spojitý inverz funkce φ). Samozřejmně existuje i verze pro Lebesgueovský integrál.

2. **Procvičme si nejjednodušší formu Fubiniho věty – integrál přes obdélník. Spočítejte následující integrály (proměnné po řadě značíme x, y):**

   (a) $\int_{[0,2]\times[0,4]} 1 + x \; dxy$

   Řešení: Funkce F je spojitá, tedy existují oba:

$$\int_{[0,2]} 1 + x \; dx = \int_0^2 1 + x \; dx$$
$$\int_{[0,4]} 1 + x \; dy = \int_0^4 1 + x \; dy$$

   - Kontrolní otázka: co je v tom druhém integrálu x?
   - No ten druhý integrál má přeci existovat pro každé $x \in [0, 2]$!
   - Obdobně ten první integrál má existovat pro každé $y \in [0, 4]$, ale vzhledem k tomu, že y neobsahuje, tak tomu je celkem lehké uvěřit.

   Dle Fubiniho věty platí:

$$\begin{aligned}
\int_{J_1\times J_2} F(x,y)\; dxy &= \int_{J_1}\left(\int_{J_2} F(x,y)\; dy\right)\; dx \\
\int_{[0,2]\times[0,4]} 1 + x\; dxy &= \int_{[0,2]}\left(\int_{[0,4]} 1 + x\; dy\right)\; dx \\
&= \int_0^2\left(\int_0^4 1 + x\; dy\right)\; dx \\
&= \int_0^2 \left[(1+x)y\right]_0^4\; dx \\
&= \int_0^2 4 + 4x\; dx \\
&= \left[4x + 4x^2/2\right]_0^2 \\
&= 16
\end{aligned}$$

   Nebo jsme to díky Fubiniho větě mohli integrovat napřed podle x:

$$\begin{aligned}
\int_{J_1\times J_2} F(x,y)\; dxy &= \int_{J_2}\left(\int_{J_1} F(x,y)\; dx\right)\; dy \\
\int_{[0,2]\times[0,4]} 1 + x\; dxy &= \int_{[0,4]}\left(\int_{[0,2]} 1 + x\; dx\right)\; dy \\
&= \int_0^4\left(\int_0^2 1 + x\; dx\right)\; dy \\
&= \int_0^4 \left[x + x^2/2\right]_0^2\; dy \\
&= \int_0^4 4\; dy \\
&= 16
\end{aligned}$$

(b) $\int_{[0,\pi]\times[0,1]} x\sin(xy)\ dxy$

Řešení: Funkce je opět krásně spojitá, tedy máme zaručenou existenci těch integrálů po jednotlivých řezech.

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\pi]\times[0,1]} x\sin(xy)\ dxy &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 x\sin(xy)\ dy\right)\ dx \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^x \sin(y)\ dy\right)\ dx \qquad \text{(substituce, } x \text{ je konstanta)} \\
&= \int_0^\pi [-\cos(y)]_0^x\ dx \\
&= \int_0^\pi (1-\cos(x))\ dx \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Poctivý čtenář zkusí aplikovat Fubiniho větu v tom druhém pořadí.

3. **Druhá verze Fubiniho věty pro „slušnou“ uzavřenou oblast $D \subseteq J_1 \times J_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Pořadí proměnných je opět x, y. Nechť**

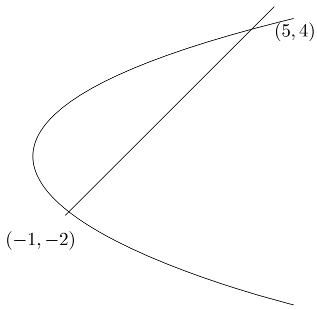
$$D = \left\{(x,y) \mid y \geq x - 1 \wedge y^2/2 - 6 \leq x\right\}$$

spočítejte

$$\int_D xy \; dxy$$

(a) **Nakreslete D.**

Řešení:



Obrázek 3.22: $D = \left\{(x,y) \mid y \geq x - 1 \wedge y^2/2 - 3 \leq x\right\}$

(b) **Má tato funkce vůbec integrál?**

i. **Ukažte, že je spojitá na vnitřku D.**

Řešení: Je to složení spojitých funkcí.

ii. **Ukažte, že „hranice množiny D má míru nula“.**

Řešení: Představte si milimetrový papír a vybarvěte jen ty čtverečky, které obsahují hranici. Vybarvené čtverečky tvoří jen malý zlomek celkového počtu čtverečků. Rozmyslete si, že pokud vezmete jemnější mřížku čtverečkového papíru, pak dostanete menší zlomek vybarvených čtverečků a limitně se tento zlomek bude blížit nule.

iii. **Rozmyslete si, že umíte sestrojit funkce g_n, které jsou spojité a platí:**

$$g_n(x,y) = f(x,y) \qquad \text{(pokud } (x,y) \in D\text{)}$$
$$g_n(x,y) = 0 \qquad \text{(pokud } d(D,(x,y)) \geq 1/n\text{)}$$

Řešení: V našem případě je existence těchto funkcí poměrně názorná. Pokud by hranice množiny D byla komplikovanější, pak bychom použili Tieczeovu větu.

iv. **Argumentujte, proč to znamená, že vícerozměrný Riemannův integrál existuje i pro f i pro její rozšíření na obdélník, tedy takovou funkci g, že:**

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \textbf{pro všechna } (x,y) \in D \\ 0 & \textbf{jinak} \end{cases}$$

Řešení: Plyne to z toho, že g „se chová hezky“ – je spojitá všude až na množinu míry nula (hranici D).

Uvědomte si, že platí:

$$\forall x, \forall y\colon \lim_{n\to\infty} g_n(x,y) = g(x,y)$$

(c) Spočítejte příslušný integrál.

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int_D xy\ dxy &= \int_{-2}^{4} \left(\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy\ dx \right)\ dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left[x^2y/2\right]_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1}\ dy \\
&= \int_{-2}^{4} \frac{-y^5}{8} + 2y^3 + y^2 - 4y\ dy \\
&= 36
\end{aligned}$$

(d) Uvědomte si, že byste ho uměli spočítat i předtím (akorát by nebyl tak příjemný a počítali byste součet více integrálů).

3.11 Cvičení

1. **Opakování minulého semestru:**

(a) **Spočítejte**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\sqrt[16]{2}\dots\sqrt[2^n]{2}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\dots\sqrt[2^n]{2} &= \lim_{n\to\infty}\prod_{j=2}^{n} 2^{1/2^j}\\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{\sum_{j=2}^{n} 1/2^j}\\ &= \lim_{n\to\infty} 2^1\\ &= 2\end{aligned}$$

(b) **Spočítejte**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

Řešení: Spočítáme napřed přesně n-tý částečný součet, potom součet řady je jen limita částečných součtů.

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}\\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+1)(k-1)}\\ &= 0.5\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= 0.5\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\dots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\right)\\ &= 0.5\left(1.5-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} &= \lim_{n\to\infty} 0.5\left(1.5-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 3/4\end{aligned}$$

(c) **Připomeňme, že získat přesný součet řady nemusí být zas tak jednoduché. Nechť následující známé výsledky jsou odstrašujícím příkladem:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Řešení: To znamená, že většinou u řady vyšetřujeme jen jestli konverguje nebo ne. Doporučuji video 3blue1brown pojednávající o zobecnění předchozího: `https://www.youtube.com/watch?v=sD0NjbwqlYw`

(d) Vyšetřete konvergenci / divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Řešení: Spočítáme n-tý částečný součet:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

Potom dle definice řada diverguje

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} s_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

(e) O řadě řekneme, že *konverguje absolutně* pokud konverguje řada

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right) \in \mathbb{R}$$

i. Ukažte, že pokud řada konverguje absolutně, pak konverguje.

Řešení: Označme si částečné součty:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
\overline{s_n} &= \sum_{k=1}^{n} |a_k|
\end{aligned}$$

Pak víme, že $\overline{s_n}$ je Cauchyovská posloupnost (připomeňte, co to znamená). Ale pak platí

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = |\overline{s_n} - \overline{s_m}|$$

ii. **Dokažte, že pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.**

Řešení: Protože řada konverguje, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 \colon |a_n| < 1$. Pak můžeme omezit konvergentní řadou (plus součet konečně mnoha reálných čísel):

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$$

Jen dodejme, že absolutní konvergence je zde nezbytný předpoklad!

(f) **Jak zjistím, jestli řada absolutně konverguje? Připomeňme, že v zimním semestru bylo za domácí úkol dokázat D'Alambertovo kritérium konvergence (viz řešené domácí úkoly z minulého semestru).**

(g) **Dokažte, že pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak nezáleží na pořadí sčítanců.**

i. **Lemma: Řada konverguje absolutně právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každou konečnou $K \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > n_0\}$ platí**

$$\sum_{k \in K} |a_k| < \varepsilon$$

Řešení: Využije se Cauchyovská vlastnost.

ii. **Dokažte původní tvrzení ze zadání.**

Řešení: Napřed to celé formulujeme malinko přesněji: pro každou bijekci $p \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí že obě řady konvergují k tomu samému:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$$

(h) **Dokažte, že pokud máme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ která konverguje (tedy posloupnost jejích částečných součtů jde k nějakému reálnému číslu), ale to samé neplatí o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (tedy ta původní řada není absolutně konvergentní), pak ji můžeme přeuspořádat tak, abychom dostali libovolné reálné číslo. Pro konkrétnost můžete uvažovat řadu**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

i. **Určete součet té konkrétní řady (přesně).**

Řešení: Vzpomeňte na Taylorovu řadu funkce $\ln(1+x)$ v nule (která funguje pro $x \in (-1, 1])$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$$

ii. Ukažte, že pokud si řadu rozdělíme na $b_1, b_2, b_3, \cdots$ a $c_1, c_2, c_3, \cdots$ (kladné a záporné členy v pořadí tak jak se objeví v a_n), pak:

A. I kladných i záporných čísel tam máme nekonečně mnoho.

B. Za předpokladu že původní řada konvergovala, pak

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

C. Žádná z posloupností $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ani $\sum_{n=1}^{\infty} -c_n$ nemá horní mez.

iii. Trik pokud máme danou hodnotu $r \in \mathbb{R}$, pak napřed sčítáme kladná a zastavíme jakmile nasčítáme ostře víc než r, pak začneme přičítat záporná a zastavíme jakmile nasčítáme ostře míň než r, pak sčítáme zase z těch kladných. . .

iv. Zkuste si předchozí postup konkrétně pro hodnotu $r = 2$.

2. **Jiné pojetí integrálu (jen přehledově, tohle po vás nikdo chtít nebude, přesto je dobré mít nějakou představu).**

   (a) **Lebesgueův integrál se většinou zavádí pomocí pojmu míry. Získejte intuici pro míru.**

   Řešení: Míra množiny by měla být zobecněním pojmu plocha, případně objem.

   Nechť X je množina a Σ je σ-algebra nad X. Tedy platí:

   i. $\forall s \in \Sigma \colon s \subseteq X$

   ii. $X \in \Sigma$

   iii. $s \in \Sigma \Rightarrow X \setminus s \in \Sigma$

   iv. $s_n \in \Sigma$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $\cup_{n\in\mathbb{N}} s_n \in \Sigma$

   Pak funkce $\mu \colon \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je míra, pokud splňuje:

   i. $\forall s \in \Sigma \colon \mu(s) \geq 0$

   ii. $\mu(\emptyset) = 0$

   iii. $s_n \in \Sigma$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou disjunktní (tedy $s_n \cap s_m = \emptyset$ pro $m \neq n$), pak

   $$\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} s_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(s_n)$$

   Často bereme $X = \mathbb{R}^n$.

   (b) **Proč se tam patláme s nějakou σ-algebrou? Nestačí vzít všechny podmnožiny?**

   Řešení: Ne, nejde mít všechno vždy měřitelné. Tedy nejde mít zároveň:

   - Všechno měřitelné
   - Míra reálného intervalu je jeho délka
   - Míra zůstane invariantní vůči posunutí a rotaci (když svou množinu posunu doprava, tak její plocha zůstane stejná)

   Příkladem je Banach-Tarského paradox `https://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox`.

   (c) **Jak do toho zapadá Lebesgueův integrál?**

   Řešení: Napřed bychom potřebovali zadefinovat Lebesgueovu míru. Na uzavřených reálných intervalech se chová tak, jak čekáte. Integrál se pak zavede ne po obdélníčcích nastojato, ale jako na jaké ploše je funkce aspoň tolik? Tedy intuitivně spíš po obdélníčcích naležato.

   A to nám dovolí integrovat třeba funkci:

   $$f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$$
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
   $$\int f(x)\ d\mu = 0$$

   Rozmyslete, že horní součty jsou vždy jedna a dolní součty jsou vždy nula. Důvod: mezi každými dvěma různými reálnými čísly je racionální číslo i iracionální číslo.

(d) **Jde tohle udělat i jinak?**

Řešení: Ano, jistý Daniell vymyslel, jak zavédst ekvivalent Lebesgueova integrálu jako limitu integrálů omezených funkcí, které bodově konvergují k dané funkci a to ještě tak, že pro každé x platí $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Lebesgueovu míru pak dostaneme jako integrál přes indikátorovou funkci (jedna pro každý bod množiny a nula jinde).

(e) **A k čemu je to dobré?**

Řešení:

- Vědět, co je „množina míry nula“ se velice hodí v aplikacích. Například v teorii pravděpodobnosti.
- Spousta vět v analýze platí „až na množinu míry nula“ – tedy až na často zanedbatelné množství patologických případů.
- Prohazovat limitu a integrál (za celkem rozumných předpokladů) se hodí.
- Intuice v teorii pravděpodobnosti – házím šipky na terč, hrot šipky je bod:
  - Jaká je pravděpodobnost, že se strefím do přesného středu (jednoho bodu)? Nula, není to nemožné, ale je to extrémně nepravděpodobné.
  - Jaká je pravděpodobnost, že se strefím do konečně mnoha daných bodů? Nula, není to nemožné, ale je to extrémně nepravděpodobné.
  - Jaká je pravděpodobnost, že se strefím přesně do nějaké přímky? Nula, má míru nula.
  - Jaká je pravděpodobnost, že se strefím do nějaké množiny bodů? Přesně daná její plochou (předpokládám, že plocha celého terče je jedna a vždy se trefím do terče). Tedy pokud ta „plocha“ existuje, tedy pokud ta množina má nějakou míru.
  - Jaká je pravděpodobnost, že výsledný hod bude mít racionální souřadnice? Nula – dá se ukázat, že množina racionálních čísel v kruhu má Lebesgueovu míru nula.

(f) **Kde se dozvědět víc?**

Řešení:

- Chodit na přednášky k matematikům.
- Přednáška u nás: Matematika++ `https://kam.mff.cuni.cz/Matematika++/` (pozor, že přednáška má tři běhy).

(g) **Co si mám zapamatovat?**

Řešení: Míra je obdoba plochy. Lebesgueův integrál je integrál „lépe se chovající“ k limitám a nespojitým funkcím.

(h) **Bonus: jak se zadefinuje Lebesgueova míra:**

Řešení: Napřed zadefinujeme vnější míru:

- Délka otevřeného intervalu $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ je značená $\ell(I) = b - a$.
- Vnější Lebesgueova míra množiny $E \subseteq \mathbb{R}$ je:

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \mid (I_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ je posloupnost otevřených intervalů, t.ž. } E \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

- Lebesgueova míra je dána na σ-algebře podmnožin reálných čísel E, které splňují:

$$E \in \sigma \Leftrightarrow (\forall A \subseteq \mathbb{R}\colon \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E)))$$

  Pro každé $E \in \sigma$ pokládáme její Lebesgueovu míru $\lambda(E) = \lambda^*(E)$.

(i) **Bonus 2: dokažte, že Lebesgueova míra $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je rovná nule.**

Řešení: Napřed ukážeme, že vnější Lebesgueova míra je rovná nule:

- Z minulého semestru si pamatujeme, že existuje bijekce mezi $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{N}$, tedy máme posloupnost všech racionálních čísel $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kde $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Vnější míra je dána jako infimum. Ukážeme tedy, že pro každé $\varepsilon > 0$ umíme najít posloupnost otevřených intervalů pokrývajících každé racionální číslo takovou, že dohromady jejich délka bude nejvýš ε. Konkrétní q_n pokryjeme intervalem:

$$\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$$

  jeho délka je rovná $\varepsilon 2^{-(n+1)}$ a součet všech délek $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon 2^{-(n+1)} \leq \varepsilon$.
- Zbývá ukázat, že množina racionálních čísel je Lebesgueovsky měřitelná.
  - Jistě platí $\lambda^*(A \cap \mathbb{Q}) = 0$ (použijeme stejný argument jako v předchozím bodě, méně než nulu nedostaneme).
  - Libovolné pokrytí množiny A je také pokrytím množiny $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, tedy nutně platí
  $$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \lambda^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) + \lambda^*(A \cap \mathbb{Q})$$
  - Poslední pozorování je subaditivita, tedy že pro každé
  $$\forall X, Y \subseteq \mathbb{R}\colon \lambda^*(X \cup Y) \leq \lambda^*(X) + \lambda^*(Y)$$
    (sjednocení pokrytí X s pokrytím Y je určitě pokrytím $X \cup Y$).

Poznamenejme, že mnohem jednodušší bylo uvědomit si, že Lebesgueova míra množiny obsahující jediné číslo je rovná nule a použít že míra spočetného sjednocení disjunktních množin je rovna součtu jednotlivých měr (součet nul).

3. **Jiné pojetí otevřenosti a tedy i spojitosti (jen přehledově, tohle po vás nikdo chtít nebude, přesto je dobré mít nějakou představu).**

   (a) **Co to je neformálně?**

   Řešení: Zobecnění otevřených množin (a tedy hlavně i pojmu spojité funkce) i na případy, kdy nemáme pojem vzdálenosti.

   (b) **Co to je formálně?**

   Řešení: Nechť X je množina a τ je množina, jejíž prvky jsou podmnožiny X (tedy $\forall I \in \tau \colon I \subseteq X$). Řekneme, že τ je topologie na X, pokud:

   i. $X \in \tau$ a zároveň $\emptyset \in \tau$

   ii. $\forall S \subseteq \tau \Rightarrow \cup S \in \tau$ (každé sjednocení libovolně mnoha prvků τ patří také do τ)

   iii. $\forall I, J \in \tau \colon I \cap J \in \tau$ (průnik každých konečně mnoha prvků τ patří také do τ)

   (c) **Jak to souvisí s tím, co už umíme?**

   Řešení: Vzpomeňte si, že předchozí tři body byly přesně ty „hlavní“ poznatky o otevřených množinách.

   (d) **K čemu se to hodí? (Některé aplikace jsou spíš homotopie, ale to úzce souvisí.)**

   Řešení:

   - Analýza a funkcionála tím získají pevný aparát.
   - V logice a teoretické informatice jsou prostory častěji topologické než metrické.
   - Překvapivé aplikace v kombinatorice.
   - Aplikace pro reprezentaci fyzikálních těles v počítači (trojúhelníkový mesh byl výmysl topologie).
   - Určení kolik je v čem děr (aneb slavný vtip že kobliha a hrnek jsou to samé).
   - Určení počtu děr se ale hodí i biologům, když zkoumají buňky na obrázcích. Pak chtějí po počítači spočítat počet „děravých buněk“ na obrázku.

   (e) **Kde se dozvědět víc?**

   Řešení:

   - Chodit na přednášky k matematikům.
   - Prof Pultr přednáší u nás topologii.
   - Existuje i přednáška Topologické metody v kombinatorice.
   - Přednáška u nás: Matematika++ `https://kam.mff.cuni.cz/Matematika++/` (pozor, že přednáška má tři běhy).

   (f) **Co si mám zapamatovat?**

   Řešení: Topologie je obdoba otevřených množin.

Kapitola 4

Bonus

Kopie kapitoly ze zimního semestru, sem se hodí lépe. Přidány obrázky a parciální derivace upraveny podle toho, jak jsme je probírali ve druhém semestru.

4.1 Optimalizace – gradient descend

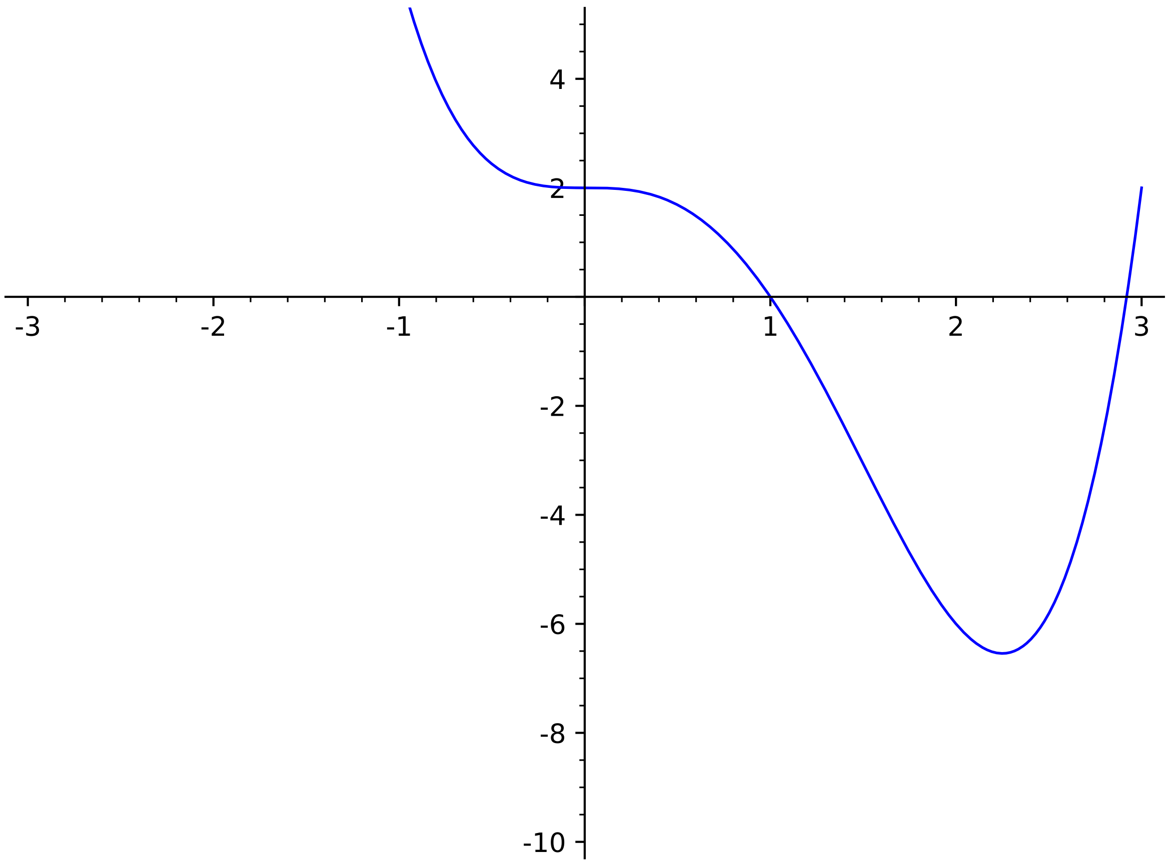
Už jsme viděli, jak použít Darbouxovu vlastnost a „půlení intervalů“ na optimalizaci. Ale to nemusí být vždy praktické:

- Rychlost konvergence...
- Jak ten postup zobecníte na funkce více proměnných?

Zkusme se podívat na následující funkci a najít její minimum fyzikální úvahou:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$$

Analytickými metodami umíme snadno najít minimum (vyšetříme první a druhé derivace, vzpomeneme si na věty z přednášky a jsme hotovi). (Obrázek 4.1).



Obrázek 4.1: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

Myšlenka: co by se stalo, kdybychom po grafu pustili kuličku?

Pozorování: skutálí se dolů do minima!

Otázka: ale kudy je dolů?

Derivaci téhle funkce umíme vyhodnotit snadno: $f'(x) = 4x^3 - 9x^2$.

- Pokud je derivace záporná, funkce klesá.
- Pokud je derivace kladná, funkce roste.

Dokonce platí něco lepšího:

- Pokud je derivace *hodně* záporná, funkce *hodně* klesá.
- Pokud je derivace *hodně* kladná, funkce *hodně* roste.

Takže když chceme minimalizovat, děláme tohle:

- Pokud je derivace (hodně) kladná, jdeme (hodně) vlevo.
- Pokud je derivace (hodně) záporná, jdeme (hodně) vpravo.

To zní dobře, protože v extrému je derivace nulová (nebo neexistuje, ale to teď zanedbáme), takže se nepohneme nikam.

Jednodušeji řečeno: odečteme derivaci.

Jednoduchý Python kód:

```
# derivative of x**4 - 3*x**3 + 2
def df(x):
    return 4*x**3 - 9*x**2

current = 4.0
iterations = 20
alpha = 0.01

for _ in range(iterations):
    print(f'current = {current}')
    current = current - alpha * df(current)

print(f'Minimum at: {current}')
```

Výstup:

```
current = 4.0
current = 2.88
current = 2.67098112
current = 2.55084758768784
current = 2.4725451025639247
current = 2.4181241075908217
current = 2.3788010610759907
current = 2.349647226900712
current = 2.3276417627201864
current = 2.3108155002345616
current = 2.297825629818595
current = 2.2877248517791187
current = 2.279827252147626
current = 2.2736260324425532
current = 2.2687407592672773
current = 2.2648822733430056
current = 2.2618286143740107
current = 2.2594080688614797
current = 2.2574869694912945
current = 2.2559607515339213
Minimum at: 2.254747295376156
```

Připomeňme, že skutečné minimum je 2.25.

Zkuste si pohrát s tím kódem. Problémy, které mohou nastat:

- Zasekneme se v inflexním bodě. Tohle se snad nestane („vratká pozice“).
- Příliš velké alpha můžeme ulítnout (poskakujeme zleva doprava čím dál tím větší skoky). Tohle bývá problém, proto se občas postupně snižuje alpha, ke kroku se přičte i nějaký malý násobek předchozího kroku... Spousta heuristik, které běží lépe. Nad rámec tohoto povídání.
- Málo iterací – no tak poběžíme více iterací (tzn. déle).

4.2 Nikdo neočekává, že tohle budete číst (a na cvičení se tomu taky nebudeme věnovat): Jednoduchá neuronka

4.2.1 Problém, který budeme řešit

Naše neuronka bude řešit klasický problém, z daného obrázku (28 krát 28 pixelů, 256 odstínů šedé) budeme chtít určit, která ručně psaná číslice je na něm napsaná.

Data si můžeme stáhnout z `http://yann.lecun.com/exdb/mnist/` kde máme popis formátu dat a některé známé metody strojového učení a jejich výsledky. My se nebudeme snažit dosáhnout co nejlepšího výsledku (ale dostaneme celkem dobrý výsledek).

Data jsou rozdělena do 60000 obrázků a příslušných 60000 labelů (správných číslic) na trénování a 10000 obrázků a labelů na testování. To je důležité, nakonec chceme zjistit, jak dobře naše neuronka odpovídá na datech, která ještě před tím nikdy neviděla (nechceme memorizovat, ale generalizovat naučené).

4.2.2 Struktura neuronové sítě

Vstup Vstupem bude obrázek 28×28 pixelů. Pro lepší manipulaci si ho přeuspořádáme do vektoru $x \in \mathbb{R}^{784}$ (například po jednotlivých řádcích).

Výstup Výstupem by intuitivně měla být ta číslice, která je na obrázku na vstupu. Ale co když nebude jasné, jestli na vstupu je jednička nebo sedmička (ručně psané se mohou plést). Asi bychom nechtěli, aby síť vystoupila „něco mezi“, tedy třeba čtyřku. Proto bude síť vystupovat pravděpodobnostní distribuci $y \in \mathbb{R}^{10}$ (kde $0 \leq y_i \leq 1$ a navíc $\sum_{i=0}^{9} y_i = 1$). Interpretujeme to tak, že na obrázku je nula s pravděpodobností y_0, na obrázku je jednička s pravděpodobností y_1, ..., devítka s pravděpodobností y_9. Pokud chceme výsledek jedno číslo, tak zvolíme ten index, který má největší pravděpodobnost (argmax).

Často se nám hodí „zmenšit“ velká čísla na malá (nebudeme mít chyby způsobené tím, že některé číslo bude příliš velké). Dále pak potřebujeme nějakou nelinearitu (afinní zobrazení nejsou dostatečně obecná). Na to se hodí následující funkce, které se říká sigmoid:

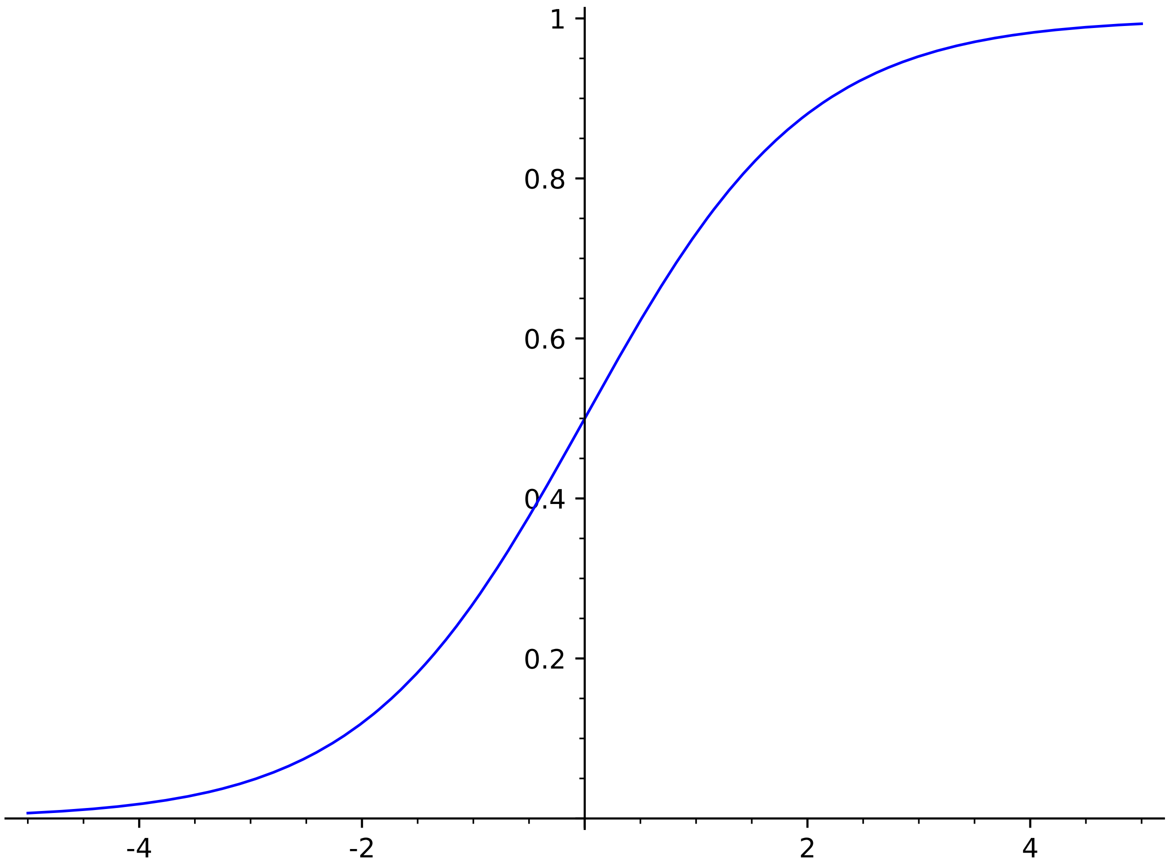
$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

(viz Obrázek 4.2).

Vstup ještě můžeme „zmáčknout“ jednoduše tím, že vydělíme 255.

Jak tedy vypadá naše síť?

- Reprezentace vstupního obrázku:
$$x \in \mathbb{R}^{784}$$
- První afinní funkce:
$$z^{(1)} = W^{(1)}x + b^{(1)} \in \mathbb{R}^{100}$$
kde indexujeme nahoře, protože dolní indexy se nám budou hodit, tedy $W^{(1)} \in \mathbb{R}^{100 \times 784}$ je jen obyčejná matice a $b^{(1)} \in \mathbb{R}^{100}$ je vektor.
- Jedna skrytá vrstva neuronů:
$$a^{(1)} = \sigma(z^{(1)}) \in \mathbb{R}^{100}$$
kde jen aplikujeme sigmoid na každé číslo vektoru $z^{(1)}$.
- Druhá afinní funkce:
$$z^{(2)} = W^{(2)}a^{(1)} + b^{(2)} \in \mathbb{R}^{10}$$
kde $W^{(2)} \in \mathbb{R}^{10 \times 100}$ a $b^{(2)} \in \mathbb{R}^{10}$.



Obrázek 4.2: Funkce sigmoida $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

- Z výsledku druhé afinní funkce uděláme pravděpodobnostní distribuci pomocí softmax:

$$(\hat{y})_i = \frac{e^{z_i^{(2)}}}{\sum_{i=1}^{10} e^{z_i^{(2)}}}$$

Tedy $\hat{y} \in \mathbb{R}^{10}$ je pravděpodobnostní distribuce (e^x je nezáporná, podělíme to součtem).

Známe obrázek x, známe příslušný 1-hot vektor, který měl vyjít jako $\hat{y}$ (pokud číslice byla tři, mělo vyjít $\hat{y} = (0,0,0,1,0,0,0,0,0,0)^T$). Jak ale určíme parametry $W^{(1)}, b^{(1)}, W^{(2)}, b^{(2)}$? Můžeme je zvolit náhodně a pak zkusit minimalizovat vzdálenost $\hat{y}$ od skutečného y.

Budeme minimalizovat něco, čemu se říká cross-entropy (protože to je zajímavá vzdálenost dvou pravděpodobnostních distribucí a máme rádi teorii informace a Claude Shannon to nevymyslel zbytečně).

$$L(y, \hat{y}) = -\sum_{i=1}^{10} y_i \log(\hat{y}_i)$$

Výhodou je, že $L(y, \hat{y})$ je jedno reálné číslo, které můžeme minimalizovat.

4.2.3 Učení

Pokud číslo $L(y, \hat{y})$ bereme jako funkci například $W^{(1)}_{1,1}$ (tj. číslo $W^{(1)}_{1,1}$ je proměnná, zbytek parametrů jsou konstanty). Teď se můžeme ptát, jak moc se změní L, když o trošku změníme $W^{(1)}_{1,1}$.

Tedy nás zajímá derivace L podle $W_{1,1}^{(1)}$ tu budeme zapisovat Leibnitzovou notací jako $\frac{\partial L}{\partial W_{1,1}^{(1)}}$.

Protože máme spoustu složených funkcí, budeme využívat poučku o derivaci složené funkce. Tvar, na který jsme zvyklí je:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

v Leibnitzově notaci to bude pak:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

kde x je proměnná, podle které derivujeme, $y = g(x)$, $z = f(y)$.

No a tohle chceme spočítat pro každý parametr a pak udělat gradient descend.

4.2.4 Učení, když bychom měli jen pár parametrů

Mohli bychom rovnou zkusit odvodit pro každý parametr zvlášť jak ho změnit, ale jednodušší to bude, když budeme vše držet ve vektorech a maticích.

Představme si, že vstupní obrázek má jen dva pixely, výstup jsou jen dvě třídy (tedy pravděpodobnost $p, 1-p$) a vnitřní vrstva je taky dva neurony. Postupně odvodíme derivace.

- Reprezentace vstupního obrázku:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- První afinní funkce:

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = W^{(1)}x + b^{(1)} = \begin{pmatrix} W_{1,1}^{(1)} & W_{1,2}^{(1)} \\ W_{2,1}^{(1)} & W_{2,2}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

- Jedna skrytá vrstva neuronů:

$$a^{(1)} = \sigma(z^{(1)}) = \begin{pmatrix} \sigma(z_1^{(1)}) \\ \sigma(z_2^{(1)}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- Druhá afinní funkce:

$$z^{(2)} = W^{(2)}x + b^{(2)} = \begin{pmatrix} W_{1,1}^{(2)} & W_{1,2}^{(2)} \\ W_{2,1}^{(2)} & W_{2,2}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- Z výsledku druhé afinní funkce uděláme pravděpodobnostní distribuci pomocí softmax:

$$(\hat{y})_i = \begin{pmatrix} \frac{e^{z_1^{(2)}}}{\sum_{i=1}^2 e^{z_i^{(2)}}} \\ \frac{e^{z_2^{(2)}}}{\sum_{i=1}^2 e^{z_i^{(2)}}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- Chceme minimalizovat ztrátu:

$$L(\hat{y}, y) = -y_1 \log(\hat{y_1}) - y_2 \log(\hat{y_2}) \in \mathbb{R}$$

Připomeňme, že x, y je obrázek a daný label, tedy čísla, která známe.

Derivování a skládání do matic a vektorů

Pro řetízkové pravidlo bychom chtěli vědět, jak moc máme pohnout vektor $\begin{pmatrix} z_1^{(2)} \\ z_2^{(2)} \end{pmatrix}$ abychom zmenšili ztrátu L.

- Pro řetízkové pravidlo chceme „derivaci L podle $z^{(2)}$“. Tedy chceme spočítat $\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z_1^{(2)}} \\ \frac{\partial L}{\partial z_2^{(2)}} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z_1^{(2)}} \\ \frac{\partial L}{\partial z_2^{(2)}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \hat{y}_1} \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial z_1^{(2)}} + \frac{\partial L}{\partial \hat{y}_2} \frac{\partial \hat{y}_2}{\partial z_1^{(2)}} \\ \frac{\partial L}{\partial \hat{y}_1} \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial z_2^{(2)}} + \frac{\partial L}{\partial \hat{y}_2} \frac{\partial \hat{y}_2}{\partial z_2^{(2)}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{y_1}{\hat{y}_1} (\hat{y}_1(1-\hat{y}_1)) + \frac{y_2}{\hat{y}_2} (-\hat{y}_1 \hat{y}_2) \\ -\frac{y_1}{\hat{y}_1} (-\hat{y}_1 \hat{y}_2) + \frac{y_2}{\hat{y}_2} (\hat{y}_2(1-\hat{y}_2)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{y}_1(y_1+y_2) - y_1 \\ \hat{y}_2(y_1+y_2) - y_2 \end{pmatrix} & (y_1 + y_2 = 1 \text{ prst. distrib.}) \\
&= \begin{pmatrix} \hat{y}_1 - y_1 \\ \hat{y}_2 - y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Ale $z^{(2)}$ není parametr, ten nemůžu změnit, ale $W^{(2)}$ můžu změnit pomocí gradient descend, tedy chci „derivaci L podle $W^{(2)}$“. Pomocí řetízkového pravidla tedy spočítám gradient. V následujícím píšu $w_{i,j}$ místo $w_{i,j}^{(2)}$ a z_i místo $z_i^{(2)}$ a a_i místo $a_i^{(1)}$, abych tam neměl tolik indexů.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{1,2}} \\ \frac{\partial L}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{2,2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial w_{1,2}} \\ \frac{\partial L}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial w_{2,2}} \end{pmatrix} & (z_2 \text{ není funkcí } w_{1,2}) \\
&= \begin{pmatrix} (\hat{y}_1 - y_1) a_1 & (\hat{y}_1 - y_1) a_2 \\ (\hat{y}_2 - y_2) a_1 & (\hat{y}_2 - y_2) a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{y}_1 - y_1 \\ \hat{y}_2 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Další parametr, který můžeme měnit dle gradient descend je $b^{(2)}$ opět vynechávám horní indexy.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial b_1} \\ \frac{\partial L}{\partial b_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial L}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial b_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{y}_1 - y_1 \\ \hat{y}_2 - y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Opět výpočet čistě pro řetízkové pravidlo „derivace L podle $a^{(1)}$“. Pozor na to, že L závisí na $z_1^{(2)}$ i $z_2^{(2)}$ a oboje závisí na $a_1^{(1)}$, tedy použijeme linearitu

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial a_1} \\ \frac{\partial L}{\partial a_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z1} \frac{\partial z_1}{\partial a_1} + \frac{\partial L}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial a_1} \\ \frac{\partial L}{\partial z1} \frac{\partial z_1}{\partial a_2} + \frac{\partial L}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial a_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\hat{y}_1 - y_1) w_{1,1} + (\hat{y}_2 - y_2) w_{2,1} \\ (\hat{y}_1 - y_1) w_{1,2} + (\hat{y}_2 - y_2) w_{2,2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{2,1} \\ w_{1,2} & w_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_1 - y_1 \\ \hat{y}_2 - y_2 \end{pmatrix} \\
&= (W^{(1)})^T \begin{pmatrix} \hat{y}_1 - y_1 \\ \hat{y}_2 - y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Teď spočítáme podle $z^{(1)}$, na to napřed potřebujeme zderivovat sigmoid:

$$\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \sigma(x)(1-\sigma(x))$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial z_1}\\ \frac{\partial L}{\partial z_2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial z_1}\\ \frac{\partial L}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial z_2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial a_1}\sigma(z_1)(1-\sigma(z_1))\\ \frac{\partial L}{\partial a_2}\sigma(z_2)(1-\sigma(z_2))\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Ten poslední výraz by se dal zapsat pomocí Hadamardova násobení matic (tam násobíme jen příslušné prvky).

- Analogicky spočítáme gradient pro $W^{(1)}$:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{1,2}}\\ \frac{\partial L}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{2,2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial z_1}\\ \frac{\partial L}{\partial z_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}$$

- Analogicky spočítáme gradient pro $b^{(1)}$:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial b_1}\\ \frac{\partial L}{\partial b_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial z_1}\\ \frac{\partial L}{\partial z_2}\end{pmatrix}$$

Příslušné gradienty můžeme odčítat v gradient descend.

4.2.5 Kód

Jednoduchý python kód. Používáme jen numpy, vynechali jsme čtení vstupu a vyhodnocování přesnosti.

```
def sigmoid(z):
    return 1 / (1 + np.exp(-z))


def loss(target, Y_hat):
    # cross-entropy https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_entropy
    L_sum = np.sum(np.multiply(target, np.log(Y_hat)))
    return -L_sum / target.shape[1]


X = X_train
Y = Y_train

# n_epochs 20..1000 should be ok
n_epochs = 50
for i in range(n_epochs):
    # Forward pass
    z1 = np.matmul(W1, X) + b1
    a1 = sigmoid(z1)
    z2 = np.matmul(W2, a1) + b2
    # softmax https://en.wikipedia.org/wiki/Softmax_function
    a2 = np.exp(z2) / np.sum(np.exp(z2), axis=0)
```

```
m = 60000

# Backward pass
dz2 = a2 - Y
dW2 = np.matmul(dz2, a1.T) / m
db2 = np.sum(dz2, axis=1, keepdims=True) / m

da1 = np.matmul(W2.T, dz2)
dz1 = da1 * sigmoid(z1) * (1 - sigmoid(z1))
dW1 = np.matmul(dz1, X.T) / m
db1 = np.sum(dz1, axis=1, keepdims=True) / m

# Update network parameters
W2 = W2 - alpha * dW2
b2 = b2 - alpha * db2
W1 = W1 - alpha * dW1
b1 = b1 - alpha * db1

# do not overshoot with many epochs
alpha = alpha * (1 - 0.1 / n_epochs)

print("Epoch", i, "loss: ", loss(Y, a2))
```