

Tuto sadu domácích úkolů odevzdejte do **16.12.2020**. Nebojte se posílat částečná řešení. Prosím nevymýšlejte řešení hromadně na fórech. Maximálně ve třech lidech a to zásadně každý online a jen přes hovor! Ujistěte se, že každý bude sepisovat sám! Pouhé vyznění řešení není spolupráce na vymýšlení, každý musí přispět! Napište s kým jste spolupracovali.

[Úkol 4.1] 2 body Spočítejte následující integrál (odevzdávejte dostatečně odůvodněný postup výpočtu).

$$\int \frac{\sin(x) \cos(x)}{1 + \sin^4(x)} dx$$

(Nápověda: nekvapte se s parciálními zlomky.)

[Úkol 4.2] 2 body O funkci $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (kde $X \subseteq \mathbb{R}$) řekneme, že je Lipschitzovská (Lipschitzovsky spojitá), pokud:

$$\exists K \in \mathbb{R}, K \geq 0, \forall x, y \in X: |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

1. Dokažte, že každá Lipschitzovská funkce je stejnoměrně spojitá.
2. Dokažte, že pokud má funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou první derivaci (na celém intervalu $[a, b]$), pak je funkce f Lipschitzovská funkce. (Nápověda: použijte Lagrangeovu větu o střední hodnotě.)

(Poznámka pod čarou: obojí jsou jen implikace. Pokud vás to bude zajímat, můžeme si ukázat protipříklady opačných implikací, ale jsou to funkce, které už dobře znáte.)