Opakování.

Věty o implicitních funkcích. Úloha: řešit systém rovnic

$$F_1(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n) = 0,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$F_n(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n) = 0$$

pro y_i jako korektně definované $f_i(\mathbf{x})$ (kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$)

A. Jedna rovnice: $F(\mathbf{x}, y) = 0$:

V okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_0)$ předp. o F: spojité p. derivace do řádu $k \geq 1$,

$$F(\mathbf{x}^0, y_0) = 0 \quad a \quad \left|\frac{\partial F(\mathbf{x}^0, y_0)}{\partial y}\right| \neq 0.$$

Potom pro dost malé δ máme v

$$\{\mathbf{x} \,|\, ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|| < \delta\} \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$$

jednoznačná řešení $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$, a získaná f má spojité p. derivace do řádu k.

Dokázáno pro jednu proměnnou x.

Vlastnosti f mohou být průhlednější označíme-li posuny $h_1 = h$ a $h_2 = f(x+h) - f(x)$ v Lagrangeově větě červeně:

$$0 = F(t+h, f(t+h)) - F(t, f(t)) =$$
$$= F(t+h, f(t) + (f(t+h) - f(t))) - F(t, f(t)) =$$
$$= \frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial x} h$$
$$= \frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial y} (f(t+h) - f(t))$$

tedy

$$f(t+h) - f(t) = -h \cdot \frac{\dfrac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(t+\theta h f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial y}} \qquad (*)$$

pro nějaké θ mezi 0 a 1.Tedy je f spojitá,

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |h| \cdot \left| \frac{K}{a} \right|$$

a z $(*)$ dále

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = - \frac{\dfrac{\partial F(t, f(t))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(t, f(t))}{\partial y}}$$

Máme-li parciální derivace funkce F v (x_0, y_0) můžeme z

$$f'(f) = -\frac{\dfrac{\partial F(t, f(t))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(t, f(t))}{\partial y}}$$

počítat derivace

$$f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), ...$$

a tedy

Taylorovy polynomy.

B. Dvě rovnice:

$$F_1(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0,$$
$$F_2(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0.$$

Pro F_1, F_2 se spoj. p. d. do řádu $k \geq 1$, v okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0)$ kde $F_i(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0) = 0$ získáme pro nějaké $\delta > 0$ v oblasti

$\{\mathbf{x} \mid ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|| < \delta\} \times (y_1^0 - \delta, y_1^0 + \delta) \times (y_2^0 - \delta, y_2^0 + \delta)$

řešení $(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}),\ f_i$ zase se spoj. p.d. do řádu k.

Místo $\left|\frac{\partial F(\mathbf{x}^0, y_0)}{\partial y}\right| \neq 0$ se předpokládá

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j} \neq 0.$$

Jacobiho determinant.

Pro konečnou posloupnost funkcí

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{x},y_1,\dots,y_m),\dots,F_m(\mathbf{x},y_1,\dots,y_m)).$$

a pro $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_m)$ se definuje *Jacobiho determinant* (krátce, *Jacobián*)

$$\frac{\mathsf{D}(\mathbf{F})}{\mathsf{D}(\mathbf{y})} = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\dots,m}$$

Svým způsobem jde o rozšíření derivace jedné F podle jednoho y: máme

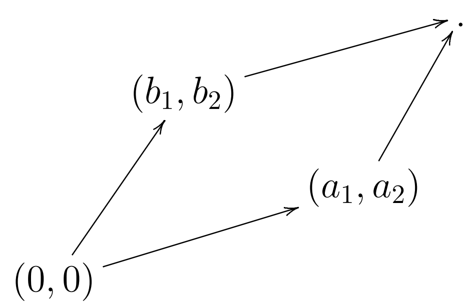
$$\frac{\mathsf{D}(F)}{\mathsf{D}(y)} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

takže následující věta přichází jako rozšíření věty řešící jednu rovnici.

Poznámka stranou. Studenti snad vědí z lineární algebry že (absolutní hodnota) determinant(u)

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ \dots, \dots, \dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

je objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,..., $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$.
(Jako snadné cvičení dokažte, že plocha rovnoběžníka



je $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{vmatrix}$.)

Takže, stejně jako funkce f při transformaci intervalu (a, b) na $(f(a), f(b))$ natahuje nebo stlačuje délky malých kousků intervalu okolo x v poměru (absolutní) hodnoty derivace $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ v x, vektorová funkce $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ při transformaci oblasti $U \subseteq \mathbb{E}_n$ na $\mathbf{f}[U]$ natahuje nebo stlačuje objemy malých kousků oblasti U okolo $\mathbf{x}$ v poměru (absolutní) hodnoty Jakobiánu $\frac{\mathsf{D}(\mathbf{f})}{\mathsf{D}(\mathbf{x})}$.

Věta. *Buďte* $F_i(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, \ldots, m$, *funkce* $n+m$ *proměnných se spojitými p. derivacemi do řádu* $k \geq 1$. *Buď*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{o}$$

a

$$\frac{\mathsf{D}(\mathbf{F})}{\mathsf{D}(\mathbf{y})}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \neq 0.$$

Potom existují $\delta > 0$ *a* $\Delta > 0$ *takové, že pro každé*

$$\mathbf{x} \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \cdots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

existuje právě jedno

$$\mathbf{y} \in (y_1^0 - \Delta, y_1^0 + \Delta) \times \cdots \times (y_m^0 - \Delta, x_m^0 + \Delta)$$

takové, že

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

(To jest,

$$\begin{aligned} &F_1(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &F_n(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_n) = 0. \quad) \end{aligned}$$

Píšeme-li toto $\mathbf{y}$ *jako vectorovou funkci* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, *mají* f_i *spojité parciální derivace do řádu* k.

Aplikace: vázané extrémy.

Lokální extrémy funkce f jedné proměnné.

f byla, dejme tomu, definována na intervalu a měla derivaci na vnitřku toho intervalu. Uvažovali jsme body v nichž byla derivace 0, a navíc kraje intervalu. A ani pro složitěší zadání to nebylo o mnoho těžší.

Pro funkce několika proměnných je hledání kandidátů pro lokální extrémy *ve vnitřních bodech definičního oboru* stejně snadné (a ze stejných důvodů): v místech lokálních extrémů $\mathbf{a}$ musí být

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (*)$$

Ale bodů na kraji je teď nekonečně mnoho.

Příklad.

Hledáme lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x + 2y$$

na kruhu

$$B = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Kruh B je kompaktní a tedy funkce f nabývá maxima i minima na B.

Žádné z nich ale není uvnitř kruhu: konstantně máme $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ and $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$; ty extrémy tedy musí být někde v nekonečné množině $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$, a pravidlo $(*)$ nám nepomůže.

Přístup: zkusme nají extrémy funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ jako *podřízené vazbám* $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Věta. *Buďte $f, g_1, \ldots, g_k$ reálné funkce definované na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{E}_n$; nechť mají spojité parciální derivace. Nechť je hodnost matice*

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

maximální, tedy k, v každém bodě oboru D.

Jestliže funkce f nabývá v bodě $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ lokálního extrému podmíněného vazbami

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ taková, že pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0.$$

Zpět k příkladu: jak to pomůže.
Máme $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ and $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ takže $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Máme tedy *jedno* λ které splňuje *dvě* rovnice

$$1 + \lambda \cdot 2x = 0 \quad \text{and} \quad 2 + \lambda \cdot 2y = 0.$$

To je možné jen když $y = 2x$. Tedy, jelikož $x^2 + y^2 = 1$, dostáváme $5x^2 = 1$ a tedy $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$; to lokalizuje extrémy do $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $(\frac{-1}{\sqrt{5}}\frac{-2}{\sqrt{5}})$.

Poznámky.

1. Funkce f, g_i jsou definovány na otevřené D takže můžeme derivovat kde potřebujeme. V typických aplikacích pracujeme s funkcemi které mohou být rozšířeny na otevřené množiny obsahující oblasti o které jde.

2. **Síla tvrzení je v tom, že předpokládáme existenci čísel**

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k$$

splňujících *víc než k* rovnic, jak jsme ostatně viděli na řešení úlohy z příkladu.

3. Čísla λ_i jsou známa jako *Lagrangeovy multiplikátory*.

Důkaz Věty. Matice M má hodnost k právě když aspoň jedna její $k \times k$ podmatice M je regulární (a tedy má nenulový determinant). Dejme tomu,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Potom podle Věty o implicitních funkcích máme v okolí bodu $\mathbf{a}$ funkce $\phi_i(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ se spojitými parciálními derivacemi takové, že (pišme $\widetilde{\mathbf{x}}$ pro $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$)

$$g_i(\phi_1(\widetilde{\mathbf{x}}), \ldots, \phi_k(\widetilde{\mathbf{x}}), \widetilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Tedy, lokální maximum nebo minimum funkce $f(\mathbf{x})$ at $\mathbf{a}$ podmíněné danými vazbami dává lokální maximum či minimum (nepodmíněné) funkce

$$F(\widetilde{\mathbf{x}}) = f(\phi_1(\widetilde{\mathbf{x}}), \ldots, \phi_k(\widetilde{\mathbf{x}}), \widetilde{\mathbf{x}}),$$

v $\widetilde{\mathbf{a}}$, a tedy je

$$\frac{\partial F(\widetilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{for} \quad i = k+1, \ldots, n,$$

to jest, podle řetízkového pravidla,

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \frac{\partial \phi_r(\widetilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \quad \text{for} \quad i = k+1, \ldots, n. \quad (2)$$

Derivujíce konstantní $g_i(\phi_1(\widetilde{\mathbf{x}}), \ldots, \phi(\widetilde{\mathbf{x}}), \widetilde{\mathbf{x}}) = 0$ dostaneme pro $j = 1, \ldots, k$,

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \frac{\partial \phi_r(\widetilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \quad \text{for} \quad i = k+1, \ldots, n. \quad (3)$$

Užijme znovu (1) (nenulový determinant). Vzhledem k hodnosti matice má systém lineárních rovnic

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot\frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\ldots,k,$$

jediné řešení $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. To jsou rovnosti z tvrzení, ale jen pro $i\le k$. Musíme ještě dokázat, že to platí i pro $i>k$. Podle (2) a (3) je pro $i>k$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot\frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i}=\\
&\qquad=-\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r}\frac{\partial \phi_r(\widetilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r}\frac{\partial \phi_r(\widetilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i}=\\
&\qquad=-\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot\frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \phi_r(\widetilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i}=\\
&\qquad=-\sum_{r=1}^{n}0\cdot\frac{\partial \phi_r(\widetilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i}=0.
\end{aligned}$$

Další užití Věty o IF: Regulární zobrazení.

Buď $U \subseteq \mathbb{E}_n$ otevřená a nechť mají

$$f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

spojité parciální derivace. Řekneme, že výsledné zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{E}_n$$

je *regulární* jestliže je

$$\frac{\mathsf{D}(\mathbf{f})}{\mathsf{D}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \neq 0$$

pro všechny body $\mathbf{x} \in U$.

Tvrzení. *Je-li* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ *regulární, je obraz* $\mathbf{f}[V]$ *každé otevřené podmnožiny* $V \subseteq U$ *otevřený.*

Komentář před důkazem: Obrazy přidané k nutným vzorům. Podobnost s obrazy uzavřených podmnožin v kompaktním případě.

Důkaz. Vezměme $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$. Definujme $\mathbf{F} : V \times \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ předpisem

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i. \qquad (*)$$

Potom je $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{o}$ a $\frac{\mathsf{D}(\mathbf{F})}{\mathsf{D}(\mathbf{x})} \neq 0$, a tedy můžeme použít větu o IF a dostaneme $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že pro každé $\mathbf{y}$ takové, že $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < \delta$ existuje $\mathbf{x}$ takové, že $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \Delta$ a $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i = 0$. To znamená, že máme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (pozor: y_i jsou zde proměnné, x_j hledané funkce), a

$$\Omega(\mathbf{y}^0, \delta) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < \delta\} \subseteq \mathbf{f}[V].$$

Tvrzení. *Buď* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ *regulární zobrazení. Potom pro každé* $\mathbf{x}^0 \in U$ *existuje otevřené okolí* V *takové, že restrikce* $\mathbf{f}|V$ *je prosté zobrazení. Nadto, zobrazení* $\mathbf{g} : f[V] \to \mathbb{E}_n$ *k* $\mathbf{f}|V$ *inversní je regulární.*

Důkaz. Znovu použijeme zobrazení $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ kde $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i$, jako v předchozím. Pro dost malé $\Delta > 0$ máme právě jedno $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ takové, že $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \Delta$. Toto $\mathbf{g}$ má navíc spojité parciální derivace. Máme

$$D(\mathrm{id}) = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) \cdot D(\mathbf{g}).$$

Podle řetízkového pravidla (a věty o násobení determinantů) je

$$\frac{\mathsf{D}(\mathbf{f})}{\mathsf{D}(\mathbf{x})} \cdot \frac{D(\mathbf{g})}{D(\mathbf{y})} = \det D(\mathbf{f}) \cdot \det D(\mathbf{g}) = 1$$

a ted je pro každé $\mathbf{y} \in \mathbf{f}[V]$, $\frac{\mathsf{D}(\mathbf{g})}{\mathsf{D}(\mathbf{y})}(\mathbf{y}) \neq 0.$

Důsledek. *Prosté regulární zobrazení* $\mathbf{f} : U \to \mathbb{E}_n$ *má regulární inversi* $\mathbf{g} : \mathbf{f}[U] \to \mathbb{E}_n$*.*

Podrobnosti.
Text: Kapitola XV, Sekce 4, 6 a 5