

## Opakování.

Totální diferenciál:

$\mu$  spojitá v okolí  $U$  bodu  $\mathbf{o}$  taková, že  $\mu(\mathbf{o}) = 0$ ,

a čísla  $A_1, \dots, A_n$  pro která

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n A_k h_k + \|\mathbf{h}\| \mu(\mathbf{h})$$

Implikuje to parciální derivace, ale ne naopak

plyne ze spojitých parciálních derivací.

## Interpretace:

Tečná nadrovina.

Aproximace.

Počítání: aritmetická pravidla jako pro obyčejné derivace,

**Řetězové Pravidlo.** *Nechť má  $f(\mathbf{x})$  totální diferenciál v bodě  $\mathbf{a}$ . Nechť mají funkce  $g_k(t_1, \dots, t_r)$  parciální derivace v  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$  a nechť je  $g_k(\mathbf{b}) = a_k$  pro  $k = 1, \dots, n$ . Potom má funkce  $(f \circ \mathbf{g})(t_1, \dots, t_r) = f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) = f(g_1(\mathbf{t}), \dots, g_n(\mathbf{t}))$  všechny parciální derivace v  $\mathbf{b}$ , a platí*

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Při skládání

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{E}_m$$

máme

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D\mathbf{f} \cdot D\mathbf{g}$$

kde  $D\mathbf{h} = \left( \frac{\partial h_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right)_{ik}$

## Lagrange v několika proměnných.

**Tvrzení.** *Nechť má  $f$  spojité parciální derivace v konvexní otevřené množině  $U \subseteq \mathbb{E}_n$ . Potom pro libovolné dva body  $x, y \in U$  existuje  $\theta, 0 \leq \theta \leq 1$ , takové, že*

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{\partial x_j} (y_j - x_j).$$

Často se s tím setkáváme ve tvaru

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h})}{\partial x_j} h_j.$$

Parciální derivace jako funkce

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D' \rightarrow \mathbb{R},$$

parciální derivace vyšších řádů

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l}, \quad \frac{\partial^r f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_r}},$$

*parciální derivace řádu  $r$ .*

Řád je dán tím, kolikrát derivujeme,

$$\frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial x \partial x}$$

jsou derivace třetího řádu.

Derivování podle téže proměnné těsně za sebou se píše jako exponent, např.

$$\frac{\partial^5 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 f(x, y)}{\partial x \partial x \partial x \partial y \partial y}, \quad \frac{\partial^5 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^5 f(x, y)}{\partial x \partial x \partial y \partial y \partial x}.$$

**Tvrzení.** *Bud'  $f(x, y)$  funkce taková, že parciální derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  a  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  jsou definovány a jsou spojité v nějakém okolí bodu  $(x, y)$ . Potom máme*

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

**Věta.** *Nechť má funkce  $f$  v  $n$  proměnných spojité parciální derivace do řádu  $k$ . Potom hodnoty těchto derivací záleží jen na tom kolikrát bylo derivováno v každé z individuálních proměnných .*

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} \quad \text{kde} \quad r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$$

$(r_j = 0$  indikuje absenci symbolu  $\partial x_j$ ).

## Vzpomínky na předchozí semestr

V dalším budeme potřebovat zase něco víc z metrických prostorů, zejména něco o kompaktnosti a úplnosti. Připomeňte si chování kompaktních (uzavřených omezených) intervalů, zejména to, že

- v nich má každá posloupnost konvergentní podposloupnost, a jsou to jediné z intervalů, pro které to platí,
- a že na nich každá spojitá funkce nabývá maxima a minima.

### Podrobněji:

Supremum množiny  $M$  :

- (1) pro každé  $x \in M$  je  $x \leq s$ , a
- (2) je-li  $x \leq y$  pro všechna  $x \in M$  je  $s \leq y$ .

Pro lineární  $\leq$  ekvivalentní s

- (1) pro každé  $x \in M$  je  $x \leq s$ , a
- (2) je-li  $y < s$  pak existuje  $x \in M$  takové, že  $y < x$ .

**Věta.** *Z každé posloupnosti na kompaktním intervalu je možno vybrat konvergentní podposloupnost.*

*Explicite: Necht'  $a, b$  jsou reálná čísla taková, že  $a \leq x_n \leq b$  pro všechna  $n$ . Potom existuje podposloupnost  $(x_{k_n})_n$  posloupnosti  $(x_n)_n$  která konverguje v  $\mathbb{R}$ , a platí  $a \leq \lim_n x_{k_n} \leq b$ .*

*Důkaz.* Vezměme

$$M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq x_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\}$$

$M$  je neprázdná omezená protože  $a \in M$  a  $b$  je horní mez  $M$ . Musí tedy existovat  $s = \sup M$  a platí  $a \leq s \leq b$ .

$M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq x_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\}$ .

Pro každé  $n$  je množina

$$K(n) = \{n \mid s - \frac{1}{n} < x_n < s + \frac{1}{n}\}$$

nekonečná: skutečně, máme  $x > s - \varepsilon$  takové, že  $x_n > x$  pro nekonečně mnoho  $n$ , zatím co podle definice množiny  $M$  je jen konečně mnoho  $n$  takových, že  $x_n \geq s + \varepsilon$ .

Zvolme  $k_1$  tak aby

$$s - 1 < x_{k_1} < s + 1$$

. Mějme zvolena  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$  taková, že  $j = 1, \dots, n$

$$s - \frac{1}{j} < x_{k_j} < s + \frac{1}{j}.$$

Jelikož  $K(n+1)$  je nekonečná, můžeme zvolit  $k_{n+1} > k_n$  tak aby

$$s - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} < s + \frac{1}{n+1}.$$

Takto zvolená podposloupnost  $(x_{k_n})_n$  naší  $(x_n)_n$  zřejmě konverguje k  $s$ .



## Kompaktní prostory.

Metrický prostor  $(X, d)$  je *kompaktní* obsahuje-li v něm každá posloupnost konvergentní podposloupnost.

**Tvrzení.** *Prostor kompaktního prostoru je kompaktní právě když je uzavřený.*

*Důkaz.* I. Bud'  $Y$  uzavřený podprostor kompaktního  $X$  a bud'  $(y_n)_n$  posloupnost v  $Y$ . Jako posloupnost v  $X$  má limitu, a z uzavřenosti je tato limita v  $Y$ .

II. Necht'  $Y$  není uzavřená. Potom existuje posloupnost  $(y_n)_n$  in  $Y$  konvergentní v  $X$  taková, že  $y = \lim_n y_n \notin Y$ . Potom  $(y_n)_n$  nemůže mít podposloupnost konvergentní v  $Y$  protože každá její podposloupnost konverguje k  $y$ .  $\square$

**Tvrzení.** *Bud'  $(X, d)$  libovolný a nechť je podprostor  $Y$  prostoru  $X$  kompaktní. Potom je  $Y$  uzavřený v  $(X, d)$ .*

*Důkaz.* Nechť  $(y_n)_n$  posloupnost v  $Y$  konverguje v  $X$  k limitě  $y$ . Potom každá podposloupnost  $(y_n)_n$  konverguje k  $y$  a tedy je  $y \in Y$ .

Metrický prostor  $(X, d)$  je *omezený* jestliže pro nějaké  $K$  platí, že

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) < K.$$

**Tvrzení.** *Každý kompaktní prostor je omezený.*

*Důkaz.* Zvolme  $x_1$  libovolně a  $x_n$  tak aby  $d(x_1, x_n) > n$ . Posloupnost  $(x_n)_n$  nemá konvergentní podposloupnost: kdyby  $x$  byla limita takové podposloupnosti bylo by pro dost velké  $n$  nekonečně mnoho členů této podposloupnosti blíže k  $x_1$  než  $d(x_1, x_n) + 1$ , spor.

**Věta.** *Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.*

*Důkaz.* Stačí dokázat pro součin dvou prostorů.

Bud'te  $(X, d_1)$ ,  $(Y, d_2)$  kompaktní a buď  $((x_n, y_n))_n$  posloupnost v  $X \times Y$ . Zvolme konvergentní podposloupnost  $(x_{k_n})_n$  posloupnosti  $(x_n)_n$  a konvergentní podposloupnost  $(y_{k_{l_n}})_n$  posloupnosti  $(y_{k_n})_n$ . Potom je

$$((x_{k_{l_n}}, y_{k_{l_n}}))_n$$

konvergentní podposloupnost posloupnosti  $((x_n, y_n))_n$ .

*Kompaktní interval* v  $\mathbb{E}_n$ : součin uzavřených omezených intervalů  $\langle a_i, b_i \rangle$

**Věta.** *Podprostor euklidovského prostoru  $\mathbb{E}_n$  je kompaktní právě když je omezený a uzavřený.*

*Důkaz.* I. Že je uzavřený a omezený už víme.

II. Bud' nyní  $Y \subseteq \mathbb{E}_n$  omezená a uzavřená. Jelikož je omezená, je pro dostatečně velký kompaktní interval

$$Y \subseteq \underline{J}^n \subseteq \mathbb{E}_n.$$

$J^n$  je kompaktní jako součin intervalů  $\langle a_i, b_i \rangle$ , a jelikož je  $Y$  uzavřený v  $\mathbb{E}_n$  je též uzavřený v  $J^n$  a tedy kompaktní.

**Tvrzení.** *Bud'  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  spojité zobrazení a bud'  $A \subseteq X$  kompaktní. Potom je  $f[A]$  kompaktní.*

*Důkaz.* Bud'  $(y_n)_n$  posloupnost v  $f[A]$ . Zvolme  $x_n \in A$  tak aby  $y_n = f(x_n)$ . Bud'  $(x_{k_n})_n$  konvergentní podposloupnost posloupnosti  $(x_n)_n$ . Potom je  $(y_{k_n})_n = (f(x_{k_n}))_n$  konvergentní podposloupnost  $(x_n)_n$ .

**Tvrzení.** *Bud'  $(X, d)$  kompaktní. Potom každá spojitá funkce  $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  nabývá maxima i minima.*

*Důkaz.*  $Y = f[X] \subseteq \mathbb{R}$  kompaktní. Je tedy omezená a musí mít supremum  $M$  a infimum  $m$ . Zřejmě máme  $d(m, Y) = d(M, Y) = 0$  a jelikož  $Y$  je uzavřená,  $m, M \in Y$ .

Víme, že spojitá  $f$  je charakterisována tím, že všechny *vzory* uzavřených množin jsou uzavřené. Nyní podle vidíme, že je-li definiční obor kompaktní platí též, že *obrazy* uzavřených podmnožin jsou uzavřené. Z toho plyne (m.j.) následující.

**Věta.** *Je-li  $(X, d)$  kompaktní a je-li  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  vzájemně jednoznačné spojitě zobrazení, je to homeomorfismus.*

Obecněji, *nechť  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  je spojitě zobrazení  $g : (X, d) \rightarrow (Z, d'')$  a nechť  $h : (Y, d') \rightarrow (Z, d'')$  je takové, že  $h \circ f = g$ . Potom je  $h$  spojitě.*

*Důkaz.* Bud'  $B$  uzavřená v  $Z$ . Potom je  $A = g^{-1}[B]$  uzavřená a tedy kompaktní v  $X$  a tedy je  $f[A]$  kompaktní, a proto uzavřená v  $Y$ . Jelikož je  $f$  zobrazení na, máme  $f[f^{-1}[C]] = C$  pro každé  $C$ . Proto je

$$h^{-1}[B] = f[f^{-1}[h^{-1}[B]]] = f[(h \circ f)^{-1}[B]] = f[g^{-1}[B]] = f[A]$$

uzavřená.

Posloupnost  $(x_n)_n$  v metrickém prostoru  $(X, d)$  je *Cauchyovská* jestliže

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$  takové, že  $m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) <$

**Pozorování.** *Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská.*

**Tvrzení.** *Nechť má Cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost. Potom konverguje (k limitě té podposloupnosti).*

*Důkaz.* Nechť je  $(x_n)_n$  Cauchyovská a nechť  $\lim_n x_{k_n} = x$ . Bud'  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  pro  $m, n \geq n_1$  a  $d(x_{k_n}, x) \leq \varepsilon$  pro  $n \geq n_2$ . Položíme-li  $n_0 = \max(n_1, n_2)$  máme pro  $n \geq n_0$  (protože  $k_n \geq n$ )

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < 2\varepsilon.$$

Metrický prostor  $(X, d)$  je *úplný* jestliže v něm každá Cauchyovská posloupnost  $(X, d)$  konverguje.

**Poznámky.** 1. Podle Bolzano-Cauchyovy věty je reálná přímka  $\mathbb{R}$  úplná.

2. Možnost kalkulu.

3. Silná ekvivalence metrik zachovává Cauchyovu vlastnost a úplnost, prostá ekvivalence ne.

**Tvrzení.** *Podprostor úplného prostoru je úplný právě když je uzavřený.*

*Důkaz.* I. Buď  $Y \subseteq (X, d)$  uzavřený. Buď  $(y_n)_n$  Cauchyovská v  $Y$ . Potom je Cauchyovská a tedy konvergentní v  $X$ , a kvůli uzavřenosti je limita v  $Y$ .

II. Necht'  $Y$  není uzavřený. Potom existuje posloupnost  $(y_n)_n$  v  $Y$  konvergentní v  $X$  taková, že  $\lim_n y_n \notin Y$ . Potom je  $(y_n)_n$  Cauchyovská v  $X$ , a jelikož je vzdálenost stejná, též v  $Y$ . Ale v  $Y$  nekonverguje.

**Tvrzení.** *Každý kompaktní prostor je úplný.*

*Důkaz.* Cauchyovská posloupnost má podle kompaktnosti konvergentní podposloupnost a tedy konverguje.



**Lemma.** *Posloupnost*

$$(x_1^1, \dots, x_n^1), (x_1^2, \dots, x_n^2), \dots, (x_1^k, \dots, x_n^k), \dots$$

je Cauchyovská v  $\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$  právě když každá z posloupností  $(x_i^k)_k$  je Cauchyovská v  $(X_i, d_i)$ .

*Důkaz.*  $\Rightarrow$  plyne bezprostředně z toho, že  $d_i(u_i, v_i) \leq d((u_j)_j, (v_j)_j)$ .

$\Leftarrow$ : Necht' je každá  $(x_i^k)_k$  Cauchyovská. Pro  $\varepsilon > 0$  a  $i$  zvolme  $k_i$  tak aby pro  $k, l \geq k_i$  bylo  $d_i(x_i^k, x_i^l) < \varepsilon$ . Potom pro  $k, l \geq \max_i k_i$  máme

$$d((x_1^k, \dots, x_n^k), (x_1^l, \dots, x_n^l)) < \varepsilon.$$

**Věta.** *Součin úplných prostorů je úplný. Speciálně,  $\mathbb{E}_n$  je úplný.*

A z toho hned dostaneme

**Důsledek.** *Podprostor  $Y$  euklidovského prostoru  $\mathbb{E}_n$  je úplný právě když je tam uzavřený.*

## **Podrobnosti.**

Text: Kapitola XIII, Sekce 7 a 6