Opakování.

Fubiniho Věta. *Interval* $J = J' \times J''$
$J' \subseteq \mathbb{E}_m$, $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$, $\quad f : J \to \mathbb{R}$.

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{xy} = \int_{J'} \left(\int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

Tedy speciálně pro dvě proměnné

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

a obecně

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2 \ldots, x_n)\mathrm{d}x_n \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1$$

Takže integrál ve více proměnných můžeme počítat s užitím primitivních funkcí.

Problém: Jako i jinde v kalkulu více proměnných máme problém s <u>definičním oborem</u> funkce $f : D \to \mathbb{R}$.

V případě jedné proměnné je kompaktní interval $\langle a, b\rangle$ celkem běžný definiční obor; už od $\mathbb{E}_2$ jsou n-rozměrné intervaly (cihly) velmi speciální a přáli bychom si (aspoň, ale pro integrování by už to uspokojivé bylo) obecné kompaktní obory D.

Kompaktní podprostory v $\mathbb{E}_n$ jsou uzavřené omezené množiny, tedy bychom mohli přistoupit k problému takto:

- nejdřív vložíme D do cihly J,
- a pak rozšíříme f definujíce ji jako 0 na $J \setminus D$.

Všimněte si, že pro potřeby integrace je jedno jakou cihlu obsahující D zvolíme.

Podívejme se ale na (zatím nezmíněné) předpoklady Fubiniho věty. Požaduje se existence $\int_J f$, a není zřejmé, že by to nová funkce vytvořená (dejme tomu) ze spojité f (typicky nespojitá na hranici D) splňovala.

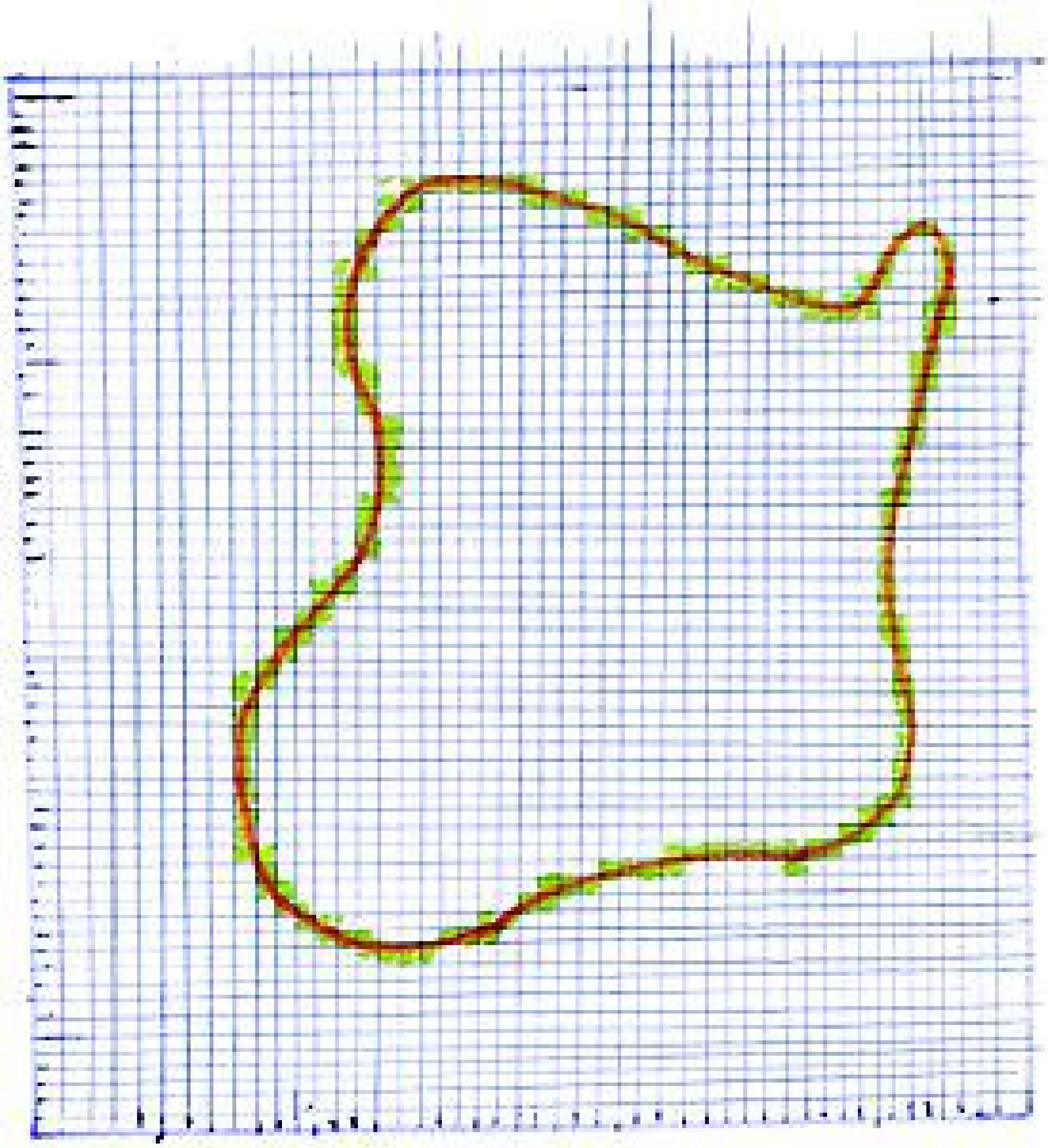
Intuitivně: Objem okraje Δ množiny D je typicky 0. Objem sjednocení cihel z rozdělení P se zmenšuje se zjemňováním P a bude menší než $\varepsilon > 0$ pro dost jemná P. Potom pro dolní a horní součty bude příspěvek nad cihlami dotýkajícími se Δ,

$$\sum\{m(f,B)\cdot \mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P), B\cap\Delta \neq \emptyset\},$$
$$\sum\{M(f,B)\cdot \mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P), B\cap\Delta \neq \emptyset\},$$

v součtech

$$s(f,P) = \sum\{m(f,B)\cdot \mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\},$$
$$S(f,P) = \sum\{M(f,B)\cdot \mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}$$

zanedbatelný.



Lebesgueův integrál (jen informace, žádná konstrukce, ani důkazy).

Riemannův integrál je intuitivně velmi uspokojivý a počítá to co chceme – pokud funguje.

- Ale nemusí existovat i pro některé dost přirozeně definované funkce, nebo při nejmenším není snadno vidět zda existuje,
- a nemůžeme provádět užitečné operace (limity, derivování) dost universálně.

(V tom druhém, nejde o to, že by dával špatné hodnoty – dá-li nějaké, jsou korektní; ale nemusí dát žádné.)

Lebesgueův integrál je rozšíření Riemannova integrálu kde můžeme dělat prakticky cokoliv
za snadno zapamatovatelných podmínek.

Několik Lebesqueovských pravidel. (V (3)-(7) je existence nalevo implikována.)

(1) Je-li J interval (cihla) a Riemannův integrál $\int_J f$ existuje, shoduje se s Lebesgueovým.

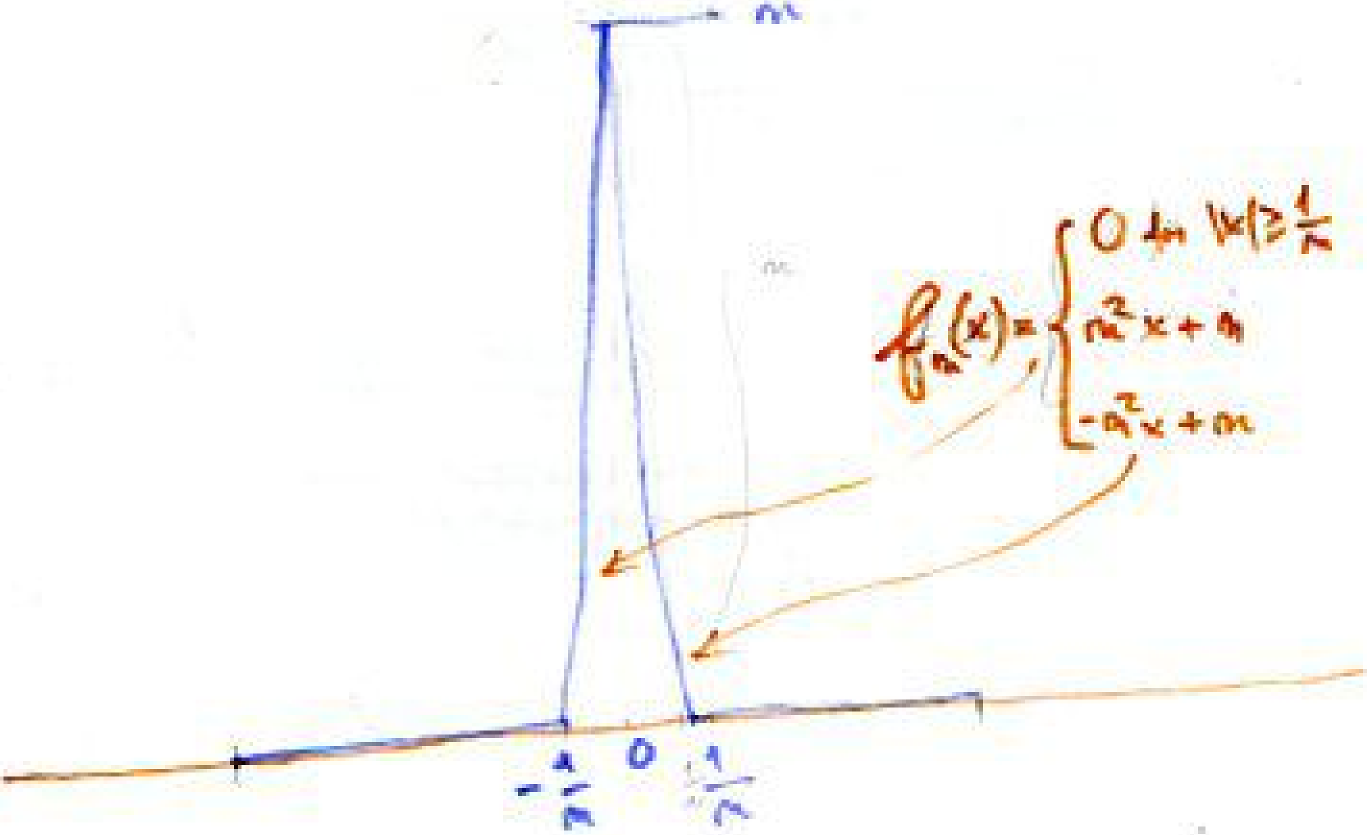
(2) Pokud $\int_{D_n} f$ existuje pro $n = 1, 2, \ldots$ existuje i $\int_{\bigcup D_n} f$.

(3) Pokud $\int_D f_n$ existuje a posloupnost $(f_n)_n$ je monotonní, je $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$.

(4) Pokud $\int_D f_n$ exisuje a $|f_n| \leq g$ pro nějaké g pro které $\int_D g$ existuje, je $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$.

(5) (Praktický důsledek (4)) Je-li D omezená, $|f_n(x)| \leq C$ a $\int_D f_n$ existují, je

$$\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n.$$



$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } |x| \geq \frac{1}{n} \\ n^2 x + n \\ -n^2 x + n \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x \neq 0 \\ n \text{ for } x = 0 \end{cases}$$

$$\int f_n(x)\,dx = 1 \qquad \int g_n(x)\,dx = 0$$

$$! \quad \lim f_n = \lim g_n \quad !$$

A ještě dvě:

(6) Buď U okolí bodu t_0 a g takové, že $\int_D g$ existuje, a $\int_D f(t,x)\mathrm{d}x$ existují a $|f(t,x)| \leq g(x)$ pro všechna $t \in U \smallsetminus \{t_0\}$ potom

$$\int_D f(t_0,x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to t_0} \int_D f(t,x)\mathrm{d}x.$$

(7) Jestliže pro integrovatelnou g

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq g(x).$$

a v nějakém okolí U bodu t_0 všechno dává smysl, je

$$\int_D \frac{\partial f(t_0,-)}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_D f(t_0,-).$$

Poznámka. Velmi zhruba: Riemannův integral byl založen na představě objemů které se (s případnou opravou) sčítají v *konečných* sjednoceních. Vzpomeneme-li si na absolutně konvergentní řady, uvědomíme si, že i *spočetné* součty dávají dobrý smysl. K Lebesgueovu integrálu se dá přistoupit přes spočetné součty místo konečných.

Trochu překvapující příklad naznačující, že je to dost podstatná změna. Na jednotkovém intervalu $\mathbb{I} = \langle 0, 1\rangle$ seřaďme všechna racionální čísla do posloupnosti

$$r_1, r_2, \dots, r_n \dots$$

a uvažme otevřené intervaly $U_n = (r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n})$. Sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ je v $\mathbb{I}$ husté, a délky sjednocovaných intervalů se sčítají na objem (délku)

$$< 4\varepsilon$$

zatímco délky konečně mnoha otevřených intervalů spojujících se do množiny husté v $\mathbb{I}$ se vždy sečtou na 1!

Integrál na kompaktní D jak bylo naznačeno před týdnem dává smysl.

Nejprve se naučíme, bez důkazu, užitečný fakt.

Věta. (Tietze) *Buď Y uzavřený podprostor metrického prostoru X. Potom každou spojitou reálnou funkci f na Y takovou, že $a \le f(x) \le b$ pro všechna x můžeme rozšířit na stejně omezenou spojitou funkci g na X.*

Měli jsme omezenou

$$f : D \to \mathbb{R}$$

definovanou na kompaktní $D \subseteq \mathbb{E}_n$. Zvolili jsme cihlu $J \supseteq D$, a definovali

$$\widetilde{f} : J \to \mathbb{R}$$

předpisem

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } \ x \in D, \\ 0 \ \text{ pro } \ x \in J \smallsetminus D \end{cases}$$

a pokusili se definovat

$$\int_D f = \int_J \widetilde{f}.$$

Problém. Je-li, dejme tomu, f spojitá, existuje $\int_J \widetilde{f}$?

Co můžeme udělat:
Zřejmě je $\phi = (x \mapsto d(x, D)) : J \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, a tedy je

$$J_n = \{x \,|\, d(x, D) \geq \frac{1}{n}\} = \phi^{-1}[\langle\frac{1}{n}, +\infty)]$$

uzavřená a $J_n \cap D = \emptyset$. Tedy je funkce $f_n : J_n \cap D \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) \ \ \text{pro} \ \ x \in D \\ 0 \ \ \text{pro} \ \ x \in J_n \end{cases}$$

spojitá a můžeme ji tedy podle Tietzeovy věty rozšířit na stejně omezenou spojitou g_n na J. Potom je

$$\lim g_n = \widetilde{f}$$

a žádaný integrál existuje podle Lebesgueova pravidla (5) nahoře.

A closed

$$f_n^{-1}[A] = \begin{cases} f^{-1}[A] & A \not\ni 0 \\ f^{-1}[A] \cup J_n & A \ni 0 \end{cases}$$

closed

Substituce.

Buď ϕ rostoucí funkce s derivací definovaná na nějakém okolí kompaktního intervalu $\langle a, b\rangle$, zobrazující ho na interval $\langle \phi(a), \phi(b)\rangle$. Buď f spojitá funkce, a buď F funkce primitivní k funkci f. Potom pro $G = f \circ \phi$ máme

$$G'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x)$$

a tedy podle (důsledku) Základní věty analysy je

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) =$$

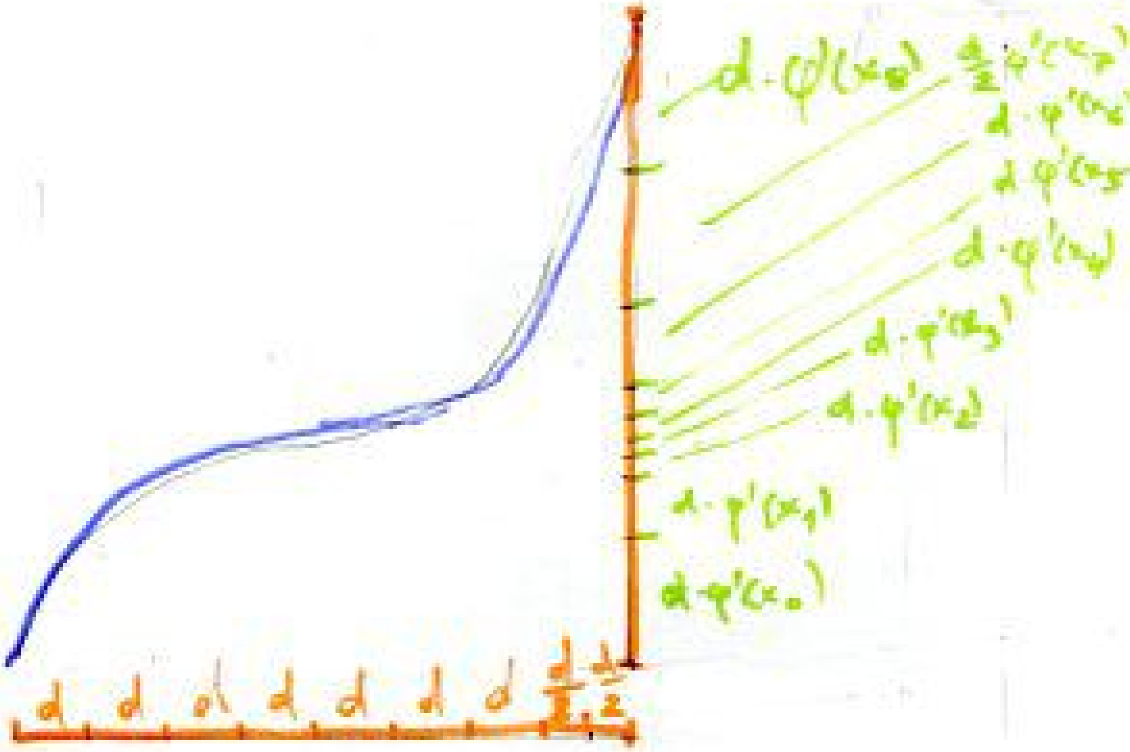
$$= G(b) - G(a) = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x.$$

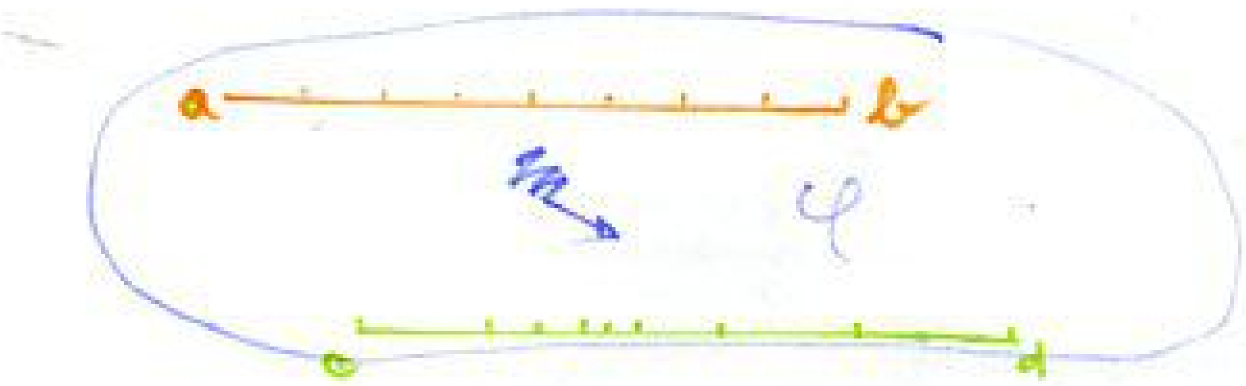
Výsledné pravidlo

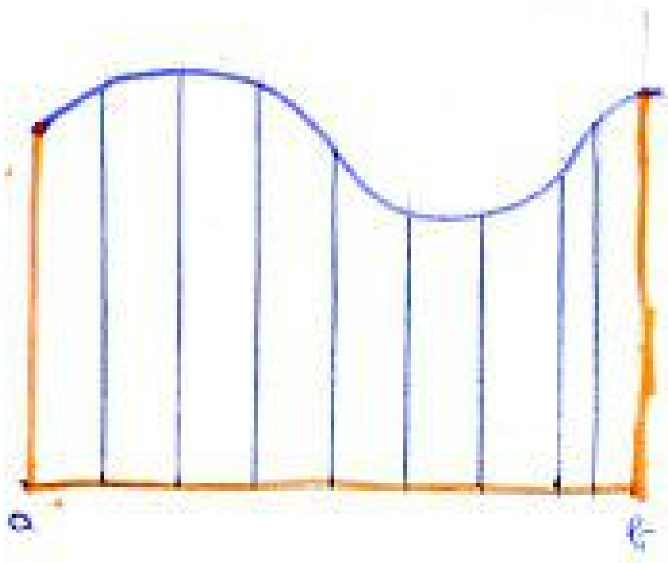
$$\int_{\langle\phi(a),\phi(b)\rangle} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\langle a,b\rangle} f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x$$

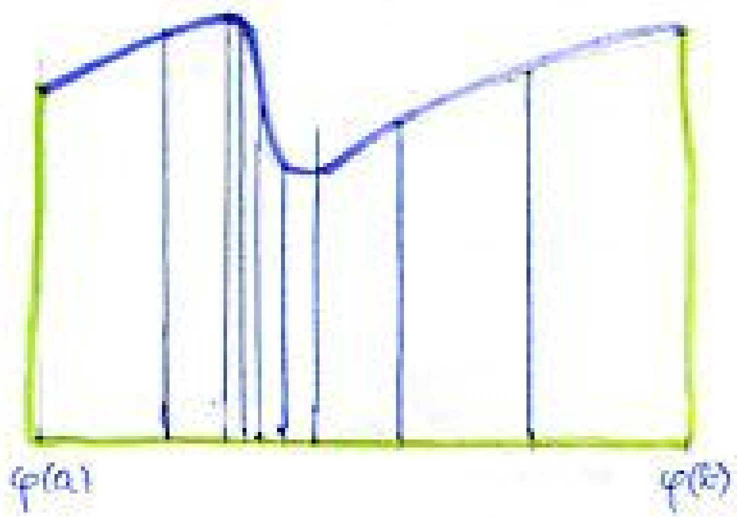
má velmi názorný geometrický smysl.

Rostoucí funkce $\phi : \langle a, b\rangle \to \langle \phi(a), \phi(b)\rangle$ popisuje deformaci intervalu $\langle a, b\rangle$ při níž jsou malé intervaly $\langle x, x + h\rangle$ natahovány či smršťovány v poměru přibližně $\phi'(x)$ (podle věty o střední hodnotě je ten interval délky h deformován na interval délky $\phi'(x + \theta h)h$). Počítáme-li integrál funkce f přes ten deformovaný integrál bude v příslušném integrálu *před* deformací sčítaný obdélník se základnou $\langle x, x+h\rangle$ odpovídat obdélníku se základnou délky (přibl.) $h \cdot \phi'(x)$ – viz obrázek. Jsou tedy $\phi'(x)$ ve formuli kompensace za lokální deformaci v bodě x.


d·φ'(x₈)
d/2 φ'(x₇)
d·φ'(x₆)
d·φ'(x₅)
d·φ'(x₄)
d·φ'(x₃)
d·φ'(x₂)
d·φ'(x₁)
d·φ'(x₀)
d d d d d d d d/2 d/2


a
b
φ
c
d


a
b


φ(a)
φ(b)

Substituce ve více proměnných.

Mějme dánu $D \subseteq \mathbb{E}_n$ a prosté regulární zobrazení $\phi : U \to \mathbb{E}_n$ takové, že $D \subseteq U$. Připomeňme si Jacobián

$$\frac{\mathsf{D}(\phi)}{\mathsf{D}(\mathbf{x})} = \det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,m}.$$

Substituční formule pro integrál (dejme tomu spojité) funkce f přes $\phi[D]$ je

$$\int_{\phi[D]} \mathbf{f} = \int_D \mathbf{f}(\phi(\mathbf{x})) \left|\frac{\mathsf{D}(\phi)}{\mathsf{D}(\mathbf{x})}\right| \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Poznámka: Týká se Lebesgueova integrálu a platí pro mnohem obecnější D a mnohem obecnější $\mathbf{f}$.

Místo důkazu. Připomeňte si kompensaci $\phi'(x)$ za deformaci v případě jedné proměnné. Tady bude malá krychle o objemu h^n

$$\langle x_1, x_1{+}h\rangle \times \langle x_2, x_2{+}h\rangle \times \cdots \times \langle x_n, x_n{+}h\rangle$$

deformována, přibližně, na rovnoběžnostěn určený vektory

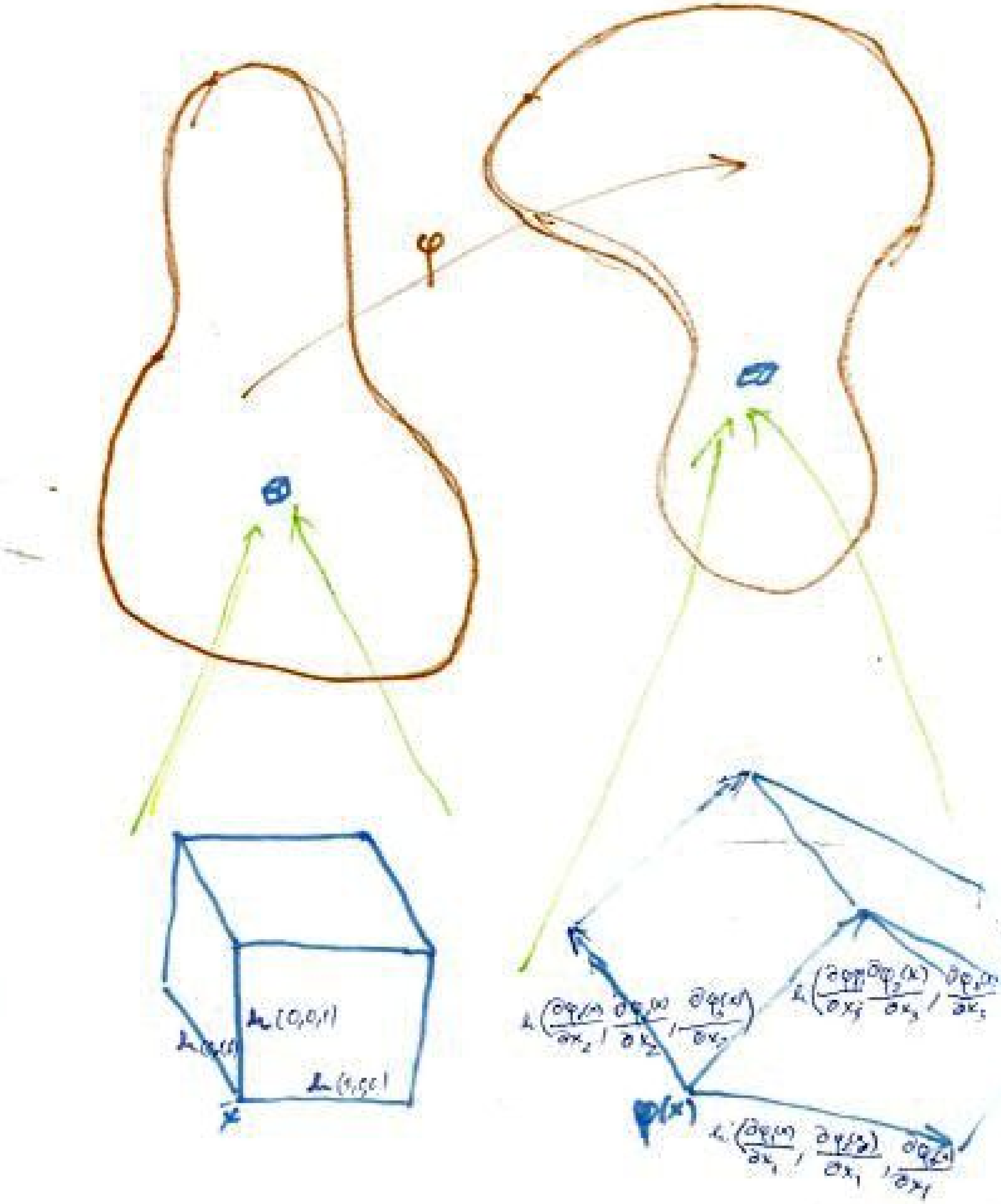
$$\phi(\mathbf{x}) + h\cdot \left(\frac{\partial\phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi_n(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

který má objem

$$h^n \cdot \left|\frac{\mathsf{D}(\phi(\mathbf{x}))}{\mathsf{D}(\mathbf{x})}\right|$$

(viz obrázek).


φ
h(0,0,1)
h(1,0,0)
x
φ(x)

Podrobnosti.

Text: Kapitola XIV, 5; Kapitola X, 4

TietzeCZ.pdf