1. Naučte se sčítat matice, násobit matice *skalárem* (tj. číslem), násobit matice vektorem, násobit matici maticí, invertovat matice.

   Zkuste invertovat následující matice:
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   Jaký je vztah mezi rankem a invertovatelností?

   Obecně maticové násobení není *komutativní*. Vymyslete dvě čtvercové matice aby $AB \neq BA$.

   Platí, že $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, vyzkoušejte. Vysvětlete proč.

2. Invertujte následující matice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Jaký je vztah mezi transpozicí inverze a inverzí transpozice?

3. Uveďte různé podmínky pro regularitu matice. Je matice s jedním nulovým sloupcem (řádkem) regulární?

4. Rozhodněte, zda součet libovolných dvou regulárních matic je regulární.

5. Ukažte, že součin regulárních matic je regulární.

6. Porovnejte množiny řešení soustav $Ax = b$ a $(QA)x = Qb$ pro
   (a) Q regulární
   (b) Q singulární

7. Je součin symetrických matic symetrická matice?

8. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovu matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $AB \neq BA$. Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

9. Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α, β platí:
   - $A + (B + C) = (A + B) + C$
   - $A + B = B + A$
   - $A + \mathbf{0} = A$
   - $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
   - $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
   - $A + (-1)A = \mathbf{0}$
   - $1A = A$
   - $A(B + C) = AB + AC$
   - $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
   - $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
   - $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$
   - $(A^T)^T = A$
   - $A^T A$ je symetrická
   - $(A + B)^T = A^T + B^T$
   - $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
   - $A \cdot I_n = A$

10. Ukažte, že jsou-li $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ dvě řešení dané soustavy lineárních rovnic, je také řešením i $\alpha x + (1-\alpha)x' = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)x'_2, \ldots, \alpha x_n + (1-\alpha)x'_n)^T$ pro libovolné reálné číslo α. Zobecněte tuto úvahu i pro více různých řešení $x, x', \ldots, x^{(k)}$ dané soustavy.

11. - Vymyslete, jak rychle mocnit číslo. Například spočítejte (na papíře), kolik je 3^{16} s použitím co nejméně násobení. Co by bylo třeba upravit, kdybychom měli exponent, který není mocninou dvojky?

- Vymyslete, jak násobením matic reprezentovat počítání Fibonacciho čísel. Fibonacciho čísla jsou daná jako $F_1 = F_2 = 1$ a pak $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$. Jak bychom to mohli použít k jejich rychlému počítání? (Nápověda: obdobný postup jako v předchozím příkladě.)