

1. Necht'  $G$  je souvislý  $d$ -regulární graf.
  - (a) Dokažte, že  $G$  má největší vlastní číslo  $d$ .
  - (b) Dokažte, že  $G$  je bipartitní právě tehdy když nejmenší vlastní číslo je rovno  $-d$ .
2. Rozložte následující matice na součin  $RJR^{-1}$ , kde matice  $R$  je regulární a matice  $J$  je v Jordanově normálním tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Vymysleme společně, jak rozložit matici  $A$  na součin  $A = U^T U$ , kde  $U$  je horní trojúhelníková matice (čtvercová). Vyzkoušejte na příkladech:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Musí to vždy jít? Musí takové matice být pozitivně definitní, to jest  $x^T A x > 0$  pro všechny nenulové vektory  $x$ ?