Řešená cvičení z lineární algebry I

Karel Král

10. října 2017

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@iuuk.mff.cuni`....

Obsah

1 Cvičení

1. Spočítejte $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Nadále budeme psát $(a, b)^T$ místo $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

   Řešení: Vektory sčítáme po jednotlivých prvcích. Výsledek: $\begin{pmatrix}1-4(-1)+2\cdot 1\\3-4\cdot 3+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}$.

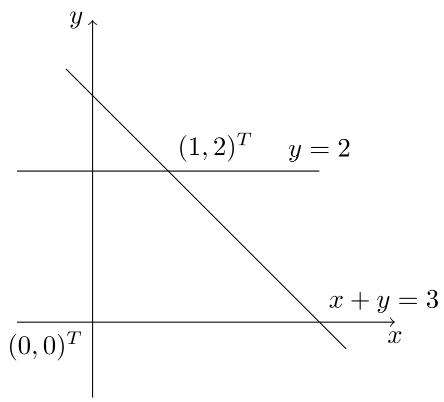
2. Co je řešením rovnice $2y - 1 = 3$? Co je řešením, pokud přidáme rovnici $x + y = 3$? Napište maticový zápis (druhou rovnici napište na první řádek), nakreslete jako průsečík přímek a jako součet vektorů.

   Řešení: První rovnici upravíme na $y = 2$ (k oběma stranám přičteme jedna a pak obě strany vydělíme dvěma). Dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Jejím řešením je očividně bod $(1, 2)^T$ (ten získáme takzvanou zpětnou substitucí).

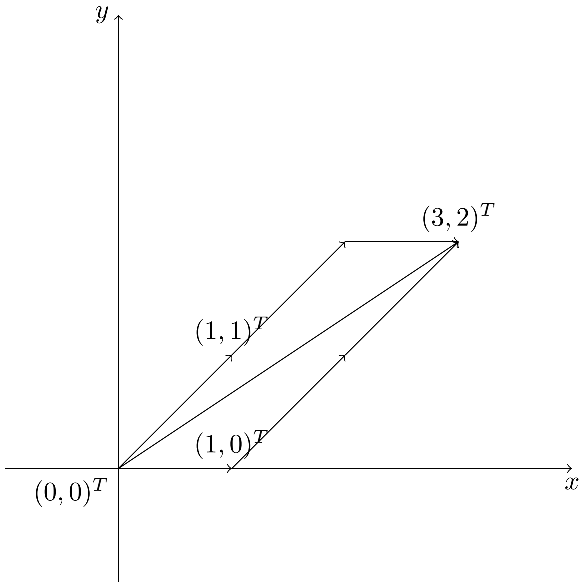
Řádkový pohled dává průnik nadrovin, které jsou ve dvou rozměrech přímky. Neformální intuice je, že v jedné rovnici si můžeme zvolit všechny proměnné až na jednu, kterou dopočítáme, dimenze množiny bodů, které danou rovnici splňují tedy bude o jedna menší než dimenze celého prostoru.



Sloupcový pohled: chceme najít řešení vyjádřené jako součet sloupců matice

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Sloupcové vektory matice nakreslíme do roviny a stejně tak vektor pravých stran.



3. Popište průnik nadrovin $2w+7x-y+3z=5$, $2w-y+3z=3$ a $2w-y=1$ (vše ve čtyřech rozměrech, tedy v $\mathbb{R}^4$). Co je to geometricky (přímka, bod nebo prázdná množina)? Jaký je průnik, pokud přidáme $2w=-1$? Najděte čtvrtou rovnici tak aby průnikem byla prázdná množina.

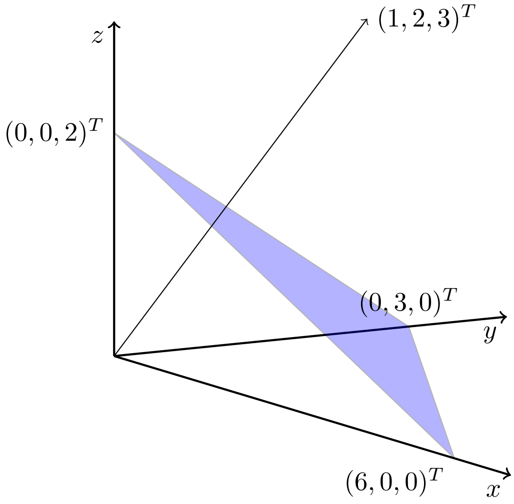
   Řešení: Tohle nenakreslím, ale můžeme řešit jako rovnice s řešením $x=2/7, y=2w-1, z=2/3$, které můžeme zapsat jako: $\begin{pmatrix}0\\2/7\\-1\\2/3\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$, což je přímka (honosně řečeno afinní prostor).

   Přidáním rovnice $2w=-1$ dostaneme jediný bod (dosadíme $w=-1/2$ do vyjádření přímky).

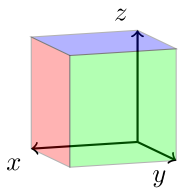
   Pokud bychom chtěli přidat rovnici, tak aby neexistovalo řešení, můžeme přidat jakoukoliv rovnici, která neobsahuje přímku z prvního odstavce. Nejjednodušší je $2w+7x-y+3z=0$.

4. Pro každou polohu tří rovin v prostoru (všechny rovnoběžné, průnik jeden bod, průnik přímka, ...) napište soustavu, která má takový tvar. Co znamená rovnoběžnost rovin pro soustavu rovnic? (Hint: počet řešení a dva řádky vyjadřující dvě rovnoběžné roviny.)

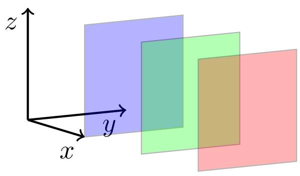
   Řešení: Rovnice $1x+2y+3z=6$ určuje rovinu s normálovým vektorem $(1,2,3)^T$ (ten je na ni kolmý). Tato rovina prochází například body $(6,0,0)^T$, $(0,3,0)^T$ a $(0,0,2)^T$, stačilo za dvě souřadnice cokoliv dosadit a dopočítat třetí souřadnici.



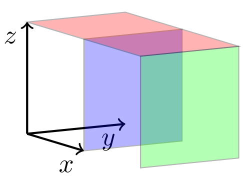
Obrázek 1: Rovina se svým normálovým vektorem.



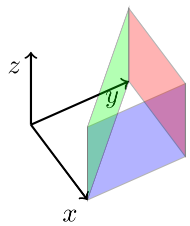
Obrázek 2: Tři roviny $x = 1$ (červeně), $y = 1$ (zeleně), $z = 1$ (modře). Všechny se protínají v jednom bodě.



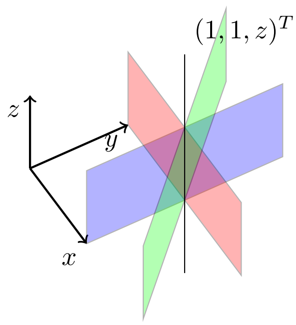
Obrázek 3: Tři roviny $x = 1$ (modře), $x = 2$ (zeleně), $x = 3$ (červeně). Všechny rovnoběžné, tedy nemají společný průnik.



Obrázek 4: Tři roviny $x = 1$ (modře), $x = 2$ (zeleně), $z = 1$ (červeně). Dvě rovnoběžné, tedy nemají společný průnik.



Obrázek 5: Tři roviny $x = 1$ (modře), $y = 1$ (červeně), $x + y = 1$ (zeleně). Žádné rovnoběžné, ale nemají společný průnik.



Obrázek 6: Tři roviny $x = 1$ (modře), $y = 1$ (červeně), $x + y = 2$ (zeleně). Žádné rovnoběžné, společný průnik je přímka.

5. Určete středovou rovnici kružnice procházející body $(3,3)^T, (1,5)^T, (5,5)^T$ Pro připomenutí kružnice se středem $S = (s_1, s_2)^T$ a poloměrem $r \in [0, \infty)$ má rovnici $(x-s_1)^2+(y-s_2)^2 = r^2$.

   Řešení: Napišme si soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}(3 - s_1)^2 + (3 - s_2)^2 &= r^2\\ (1 - s_1)^2 + (5 - s_2)^2 &= r^2\\ (5 - s_1)^2 + (5 - s_2)^2 &= r^2\end{aligned}$$

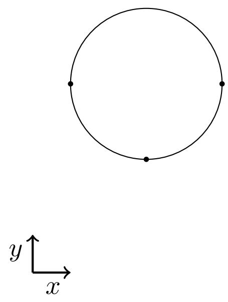
   Po roznásobení:

$$s_1^2 - 6s_1 + 9 + s_2^2 - 6s_2 + 9 = r^2 \tag{1}$$
$$s_1^2 - 2s_1 + 1 + s_2^2 - 10s_2 + 25 = r^2 \tag{2}$$
$$s_1^2 - 10s_1 + 25 + s_2^2 - 10s_2 + 25 = r^2 \tag{3}$$

   Od první i od druhé rovnice odečteme třetí rovnici:

$$\begin{aligned}4s_1 - 16 + 4s_2 - 16 &= 0\\ 8s_1 - 24 &= 0\end{aligned}$$

   Výsledkem tedy je: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 2^2$.



Obrázek 7: Kružnice se středem v $(3,5)^T$ a poloměrem dva.

6. Pod jakou podmínkou jsou body $(0,y_1)^T,(1,y_2)^T,(2,y_3)^T$ na jedné přímce? Pod jakou podmínkou jsou body $(0,0)^T,(y_1,y_2)^T,(y_3,y_4)^T$ na jedné přímce?

   Řešení: Napišme si parametrickou rovnici přímky procházející body $(0,y_1)^T,(1,y_2)^T$, ta je $(0,y_1)^T+t(1,y_2-y_1)^T$ pro $t\in\mathbb{R}$. Aby třetí bod $(2,y_3)^T$ ležel na této přímce, musí $t=2$ a tedy $y_3=2(y_2-y_1)$.

   Obdobně řešíme i druhý případ, parametrická rovnice je $t(y_1,y_2)^T$ a třetí bod tedy splňuje $y_3=ty_1$ a zároveň $y_4=ty_2$ (pro tu samou hodnotu t).

   Tento příklad je řešitelný obdobně i pomocí obecné rovnice.

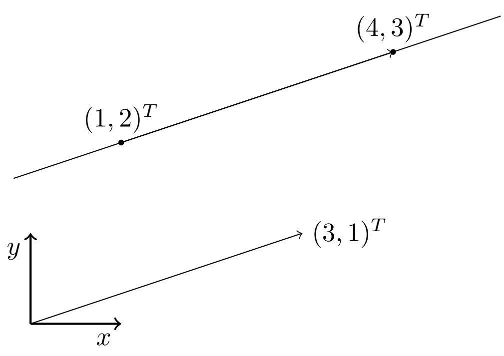
7. (a) Napište parametrické vyjádření $S=\{\vec{u}+t\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$ přímky jdoucí body $(1,2)^T,(4,3)^T$.

   Řešení: Parametrické vyjádření se skládá ze "startovního" vektoru u a směrového vektoru v, "podél kterého se můžeme pohybovat ze startu."

   Startovní vektor můžeme volit například vektor $(1,2)^T$ a směrový získáme jako druhý vektor minus tento první $(4,3)^T-(1,2)^T=(3,1)^T$. Parametrické vyjádření tedy je $\big\{(1,2)^T+t(3,1)^T\mid t\in\mathbb{R}\big\}$.

   Platí, že místo teď vypočteného směrového vektoru můžeme vzít jeho jakýkoliv nenulový násobek, což změní jen hodnotu parametru t.

   Všimněte si, že volně zaměňuji body z prostoru $\mathbb{R}^2$ za vektory. Pokud zvolíme soustavu souřadnic, pak se na bod můžeme dívat jako na vektor jeho souřadnic. Naproti tomu vás čeká mnohem obecnější definice vektorů. Vektorem bude mimo jiné i funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



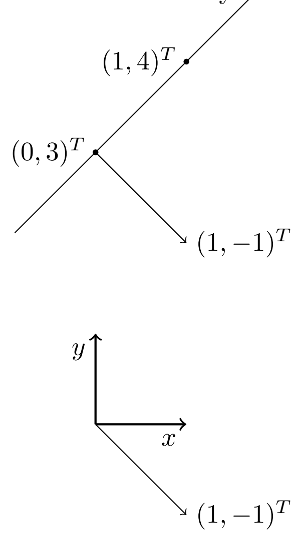
Obrázek 8: Přímka, vyznačený směrový vektor.

   (b) Napište obecnou rovnici $ax+by+c=0$ přímky jdoucí body $(0,3)^T,(1,4)^T$. Nakreslete vektor $(a,b)^T$, nepřijde vám kolmý na tu přímku?

Řešení: Zde řešíme soustavu rovnic, případně určíme směrový vektor a k němu kolmý vektor zvaný normálový (pro vektor $(a, b)^T$ je kolmým vektorem vektor $(-b, a)^T$ i vektor $(b, -a)^T$, to že jsou opravdu kolmé bude předmětem některého příštího cvičení).

Směrový vektor je $(1, 1)^T$, normálový tedy bude $(1, -1)^T$. Normálový vektor udává koeficienty a, b v rovnici $ax + by = c$. Dosazením dopočteme koeficient c. Výsledek je $x - y = -3$.

Opět můžeme celou rovnici násobit nenulovým číslem a přímka zůstane nezměněna.



Obrázek 9: Přímka, vyznačený normálový vektor.

(c) Převeďte obecnou rovnici $3x - 2y + 1 = 0$ na parametrické vyjádření.

Řešení: Můžeme spočítat dva body ležící na této přímce a postupovat jako v předešlém případě. Druhá možnost je spočítat směrový vektor $(2, 3)^T$ (kolmý na normálový vektor $(3, 2)^T$) a dopočítat startovní bod například dosazením nuly za x a získáním $(0, 1/2)^T$.

(d) Převeďte parametrické vyjádření $S = \left\{(1, 2)^T + t(-1, 2)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ na obecnou rovnici.

Řešení: Můžeme spočítat dva body ležící na této přímce a postupovat jako v předešlém případě. Druhá možnost je spočítat normálový vektor $(2, 1)^T$ (kolmý na směrový vektor $(-1, 2)^T$) a dopočítat $c = -4$ pro počáteční bod $(2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + c = 0)$.

Jsou daná vyjádření jednoznačná? *Řešení:* Nejsou. Směrový vektor můžeme vynásobit libovolnou nenulovou konstantou. Navíc jako počáteční bod můžeme volit libovolný bod na dané přímce. Obdobně celou obecnou rovnici můžeme vynásobit libovolnou nenulovou konstantou.

Najděte obě vyjádření roviny procházející body $(1, 2, 0)^T, (-1, 0, 1)^T, (0, 3, 1)^T$, pokuste se je na sebe navzájem převést. Co by se stalo, kdyby všechny tři body byly na jedné přímce?

Řešení: TODO