

Fourierovy obrazy: Spočítejte Fourierovy obrazy následujících vektorů:

1. $(0, 0, \dots, 0)$
2. (x, x, \dots, x)
3. $(\omega^0, \omega^2, \omega^4, \dots, \omega^{2n-2})$ Kde $\omega = e^{2\pi i/n}$.

Pozor, že po vás v domácím úkolu chceme obecné výsledky, takže budete používat matematickou indukci.

Pokud se divíte, že se něco sečetlo na nulu, pak zkuste použít vzorec pro součet geometrické posloupnosti:

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

velmi často vám ve cvičeních vyjde, že $q = \omega$ a n -tá mocnina je rovna jedné (konec konců ω je n -tá odmocnina jedné). Také nezapomeňte, že když mocníte ω , tak pro velmi vysoké mocniny se to moduluje (například $\omega^{13} = \omega^5$, pokud ω je osmá primitivní odmocnina jedné).

Pokud si stále nejste jisti mocněním ω , pak se koukněte v pdf na stranu 397 a na stranu 396 na komplexní čísla – násobení odpovídá otočení po té kružnici (součtu úhlů jako na cvičení) a tedy mocnění odpovídá opakovanému otáčení. V této intuici také n -té odmocniny z jedné tvoří n rovnoměrně rozmístěných bodů na obvodu jednotkové kružnice a primitivní odmocnina z jedné je první bod od jedničky proti směru hodinových ručiček.

Před řešením úkolů doporučujeme, abyste si prošli znovu řešení příkladu 2. a 3. (na cvičení značené jako (b), (c)).

Následuje přepis výsledků algoritmu ze cvičení, podrobně popsán v knize na straně 398 (kniha je zdarma stažitelná v pdf na: <https://knihy.nic.cz/>). Jako ω používáme vždy $e^{2\pi i/8} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$.

Počítám: $FFT(8, (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})\sqrt{2}, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])$

Počítám: $FFT(4, i, [0, 0, 0, 0])$

Počítám: $FFT(2, -1, [0, 0])$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [0]) = [0]$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [0]) = [0]$

Vyšlo mi: $FFT(2, -1, [0, 0]) = [0, 0]$

Počítám: $FFT(2, -1, [0, 0])$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [0]) = [0]$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [0]) = [0]$

Vyšlo mi: $FFT(2, -1, [0, 0]) = [0, 0]$

Vyšlo mi: $FFT(4, i, [0, 0, 0, 0]) = [0, 0, 0, 0]$

Počítám: $FFT(4, i, [0, 0, 0, 0])$

Počítám: $FFT(2, -1, [0, 0])$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [0]) = [0]$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [0]) = [0]$

Vyšlo mi: $FFT(2, -1, [0, 0]) = [0, 0]$

Počítám: $FFT(2, -1, [0, 0])$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [0]) = [0]$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [0]) = [0]$

Vyšlo mi: $FFT(2, -1, [0, 0]) = [0, 0]$

Vyšlo mi: $FFT(4, i, [0, 0, 0, 0]) = [0, 0, 0, 0]$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(8, (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}) \sqrt{2}, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\text{Počítám: } FFT(8, (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}) \sqrt{2}, [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13])$$

$$\text{Počítám: } FFT(4, i, [13, 13, 13, 13])$$

$$\text{Počítám: } FFT(2, -1, [13, 13])$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [13]) = [13]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [13]) = [13]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(2, -1, [13, 13]) = [26, 0]$$

$$\text{Počítám: } FFT(2, -1, [13, 13])$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [13]) = [13]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [13]) = [13]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(2, -1, [13, 13]) = [26, 0]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(4, i, [13, 13, 13, 13]) = [52, 0, 0, 0]$$

$$\text{Počítám: } FFT(4, i, [13, 13, 13, 13])$$

$$\text{Počítám: } FFT(2, -1, [13, 13])$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [13]) = [13]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [13]) = [13]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(2, -1, [13, 13]) = [26, 0]$$

$$\text{Počítám: } FFT(2, -1, [13, 13])$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [13]) = [13]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [13]) = [13]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(2, -1, [13, 13]) = [26, 0]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(4, i, [13, 13, 13, 13]) = [52, 0, 0, 0]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(8, (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}) \sqrt{2}, [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13]) = [104, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\text{Počítám: } FFT(8, (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}) \sqrt{2}, [1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i])$$

$$\text{Počítám: } FFT(4, i, [1, -1, 1, -1])$$

$$\text{Počítám: } FFT(2, -1, [1, 1])$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [1]) = [1]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [1]) = [1]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(2, -1, [1, 1]) = [2, 0]$$

$$\text{Počítám: } FFT(2, -1, [-1, -1])$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [-1]) = [-1]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [-1]) = [-1]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(2, -1, [-1, -1]) = [-2, 0]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(4, i, [1, -1, 1, -1]) = [0, 0, 4, 0]$$

$$\text{Počítám: } FFT(4, i, [i, -i, i, -i])$$

$$\text{Počítám: } FFT(2, -1, [i, i])$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [i]) = [i]$$

$$\text{Vyšlo mi: } FFT(1, 1, [i]) = [i]$$

Vyšlo mi: $FFT(2, -1, [i, i]) = [2i, 0]$

Počítám: $FFT(2, -1, [-i, -i])$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [-i]) = [-i]$

Vyšlo mi: $FFT(1, 1, [-i]) = [-i]$

Vyšlo mi: $FFT(2, -1, [-i, -i]) = [-2i, 0]$

Vyšlo mi: $FFT(4, i, [i, -i, i, -i]) = [0, 0, 4i, 0]$

Vyšlo mi: $FFT(8, (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})\sqrt{2}, [1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i]) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0]$