Řešená cvičení z lineární algebry II

Karel Král

26. dubna 2017

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@iuuk.mff.cuni`....

Obsah

1 Cvičení

Já jsem Karel, pro kterou přednášku cvičíme, jazyk cvičení, zápočet, jak se učit...

0. Kdo co potřebuje opakovat z minulého semestru.

   Řešení: Viz skripta Milana Hladíka.

1. Zopakujte definici skalárního součinu a všeho, co jste o něm slyšeli.

   Řešení: Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, skalární součin je binární operace $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:

   (a) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = \vec{0}$

   (b) $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$

   (c) $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \langle x \mid y \rangle$

   (d) $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ (respektive $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$ pro komplexní čísla).

   Řekneme, že vektory u, v jsou na sebe *kolmé*, pokud $\langle x \mid y \rangle = 0$.

   Norma daná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. Intuitivně norma určuje délku vektoru. Připomeňme, že norma lze definovat i o něco obecnějším způsobem, ale normy dané skalárním součinem jsou velice užitečné.

   Geometrická interpretace standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$ je pak $\langle x \mid y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\varphi)$, kde φ je úhel mezi vektory x, y (porovnejte s definicí kolmosti).

   Navíc víme, že když máme ortonormální vektory, pak jsou lineárně nezávislé.

2. Spočítejte standardní skalární součin vektorů $(1, 2, 3)^T, (0, 0, 1)^T, (1, -2, 1)^T$. Které z nich jsou navzájem kolmé? Jaká je délka prvního vektoru? Jak daleko jsou od sebe první a třetí vektor?

   Řešení: $\langle (1, 2, 3)^T | (0, 0, 1)^T \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$ – nejsou kolmé, $\langle (1, 2, 3)^T | (1, -2, 1)^T \rangle = 1 - 4 + 3 = 0$ tedy jsou kolmé, $\langle (0, 0, 1)^T | (1, -2, 1)^T \rangle = 1$ tedy nejsou kolmé.

   Délka prvního vektoru $\|(1, 2, 3)^T\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

   První a třetí vektor jsou od sebe $\|(1, 2, 3)^T - (1, -2, 1)^T\| = \|(0, 4, 2)^T\| = \sqrt{20}$.

3. Označme řádky matice A jako vektory $v_1, \ldots, v_m$ a sloupce matice B vektory $w_1, \ldots, w_p$. Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice AB?

   Řešení: $(AB)_{i,j} = \langle v_i | w_j \rangle$

   Dokažte, že řádkový prostor a kernel jsou navzájem kolmé.

   Řešení: Kernel je vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic, tedy pro každý řádek musí platit, že po dosazení dostaneme nulu.

4. Pro skalární součin definovaný $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2 - 1$ a $5x^3 - 3x$ navzájem kolmé.

   Řešení: $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)(5x^3 - 3x)\, dx = \int_{-1}^{1} 15x^5 - 14x^3 + 3x\, dx = [\frac{15}{6} x^6 + \frac{7}{2} x^4 + \frac{3}{2} x^2]_{-1}^{1} = 0$

5. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:

   (a) (Standardní skal. souč.) V $\mathbb{R}^n$ definujeme $\langle x \mid y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

   (b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ definujeme $\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$.

6. O symetrické matici reálné A, pro kterou platí $x^T A x > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y\rangle = x^T A y$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

   Řešení: Přímo ověření definice.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A, která ho určuje.

   Řešení: Podívejte se, co se děje v součinech dvojic vektorů z kanonické báze.

   Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.

   Řešení: Ověření definice.

7. Dokažte, že všechny vektory $v \in \mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1, 0, -3)^T |v\rangle = 0$ tvoří vektorový prostor. Jinak řečeno $\left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | \langle (1, 0, -3)^T |v\rangle = 0\right\}$ tvoří vektorový prostor.

   Řešení: Ověření definice.

   Dokažte, že všechny vektory z $\mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1, 0, -3)^T |v\rangle = 2$ tvoří afinní prostor (a to rovinu).

   Řešení: Ověření definice.

8. Mějme dva vektory $(2, 5)^T, (3, 1)^T$, co musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Co musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?

9. Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Řešení: Rozepište levou stranu podle definice a použijte linearitu skalárního součinu.

   Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

   Řešení: Ne, použijte předchozí část cvičení.

Pro zvídavé Dokažte, že v rovině neexistují čtyři body, tak že vzdálenosti mezi nimi jsou celá lichá čísla (mohou a nemusí být všechna stejná).

2 Cvičení

1. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:
   (a) (Standardní skal. souč.) V $\mathbb{R}^n$ definujeme $\langle x \mid y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
   (b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ definujeme $\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
   (c) Stopa součinu matic: $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$, kde A, B jsou matice stejné velikosti a tr značí stopu, tj. součet čísel na diagonále.

2. O symetrické matici reálné A, pro kterou platí $x^T A x > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y\rangle = x^T A y$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

   Řešení: Přímo ověření definice.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A, která ho určuje.

   Řešení: Podívejte se, co se děje v součinech dvojic vektorů z kanonické báze.

Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.

Řešení: Ověření definice.

Pozitivně (semi-)definitní matice mimo jiné hrají velice důležitou roli v matematické optimalizaci (takzvané semidefinitní programování).

3. Určete podle Gramm-Schmidtova předpisu ortonormální bázi řádkových prostorů následujících matic:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   Řešení: Odečtením projekcí spočteme nejprve kolmý vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i \mid z_j \rangle z_j$; a ten pak normalizujeme $z_i = \frac{y_i}{||y_i||}$.

   Normalizujeme $y_1 = x_1$: $||y_1|| = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

   $\langle x_2 \mid z_1 \rangle = 5$ a proto $y_2 = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.

   Normalizujeme y_2: $||y_2|| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.

   $\langle x_3 \mid z_1 \rangle = 5$, $\langle x_3 \mid z_2 \rangle = -1$ a tedy $y_3 = (-1, -1, 1, 1)^T$.

   Normalizujeme y_3: $||y_3|| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

   Vyjde nám: $Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4. Mějme dva vektory $(2, 5)^T, (3, 1)^T$, co musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Co musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?

   Řešení: Řešme druhou část, ilustrace viz obrázek 1. Délka vektoru $u = (2, 5)$ je $\|(2, 5)\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. Délka vektoru $v = (3, 1)$ je $\|(3, 1)\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Vektor se stejným směrem jako v a jednotkovou délkou je $v/\|v\| = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$. Skalární součin $\langle u|v \rangle = 6 + 5 = 11$. Vzpomeňme si na středoškolskou goniometrii, vidíme že pokud by vektor v měl jednotkovou délku, promítl by se na $\frac{\cos(\varphi)}{\|u\|} u$. Využitím podobnosti trojúhelníků a vztahu $\langle x|y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi$ dostaneme první krok Gram-Schmidtovy ortogonalizace, tedy vyjádření kolmého vektoru $v - u \langle u|v \rangle / \langle u|u \rangle = (3 - (22/29), 1 - (55/29))$. Ověřme ještě ortogonalitu: $\langle (2, 5) | (3 - (22/29), 1 - (55/29)) \rangle = 6 - 44/29 + 5 - 275/29 = 0$.

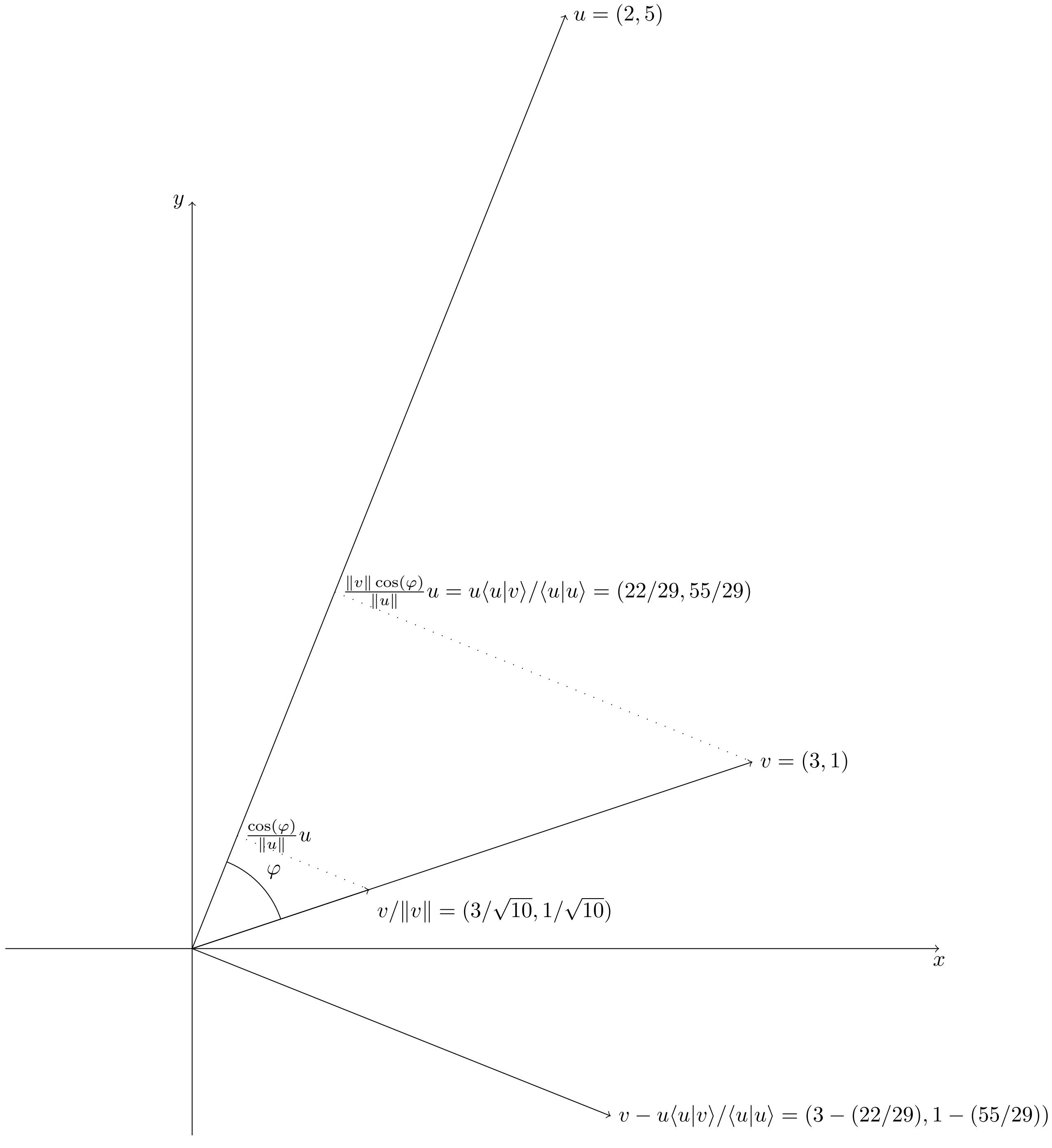
5. Dokažte, že reálná norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Řešení: Rozepište levou stranu podle definice a použijte linearitu skalárního součinu.

   Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

   Řešení: Ne, použijte předchozí část cvičení.

Errata QR kódy, Reed-Solomonovy kódy a souvislost s rychlou Fourierovou transformací, Fourierovou transformací v analýze a jejich využití.



Obrázek 1: Počítání kolmé projekce vektoru v na vektor u.

6. Ukažte, že sloupce Hadamardovy matice $H_m \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$ definované jako

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},$$

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix},$$

jsou ortonormální.

Pro zvídavé Kontrola maticového násobení: máte program, který tvrdí, že umí násobit matice rychle. Stačí skontrolovat $Cx = A(Bx)$ kde C je výstup programu po násobení AB a x je náhodný $\{0, 1\}$ vektor správné délky. Dokažte, že pak pokud je C špatně, pak s pravděpodobností aspoň polovina rovnost $Cx = ABx$ neplatí.

3 Cvičení

1. O symetrické reálné matici A, pro kterou platí $x^T Ax > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y \rangle = x^T Ay$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

   Řešení: Přímo ověření definice.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A, která ho určuje.

   Řešení: Podívejte se, co se děje v součinech dvojic vektorů z kanonické báze.

   Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.

   Řešení: Ověření definice.

   Pozitivně (semi-)definitní matice mimo jiné hrají velice důležitou roli v matematické optimalizaci (takzvané semidefinitní programování).

2. Spočítejte vzdálenost bodu $(1, 2, 0, 1)^T$ od roviny generované vektory $(1, 1, 0, 0)^T$, $(2, -1, 0, 0)^T$.

   Řešení: Vektory roviny ortonormalizujeme a dostaneme $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)^T$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)^T$ a pak už jen odečteme od zadaného vektoru jeho kolmou projekci a tím dostaneme $(0, 0, 0, 1)^T$ jehož délka je jedna. Postupovali jsme dle Gramm-Schmidtovy ortonormalizace (přesvědčete se, které vektory vám vydá a se kterými počítáte během ní).

   Příklad šel řešit i metodou kouknu a vidím, protože vektory, které generují rovinu generují celou rovinu danou prvními dvěma souřadnicemi a nic jiného.

3. Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$.

   Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

   Řešení: $(1, 2, 3) \perp (5, 2, -3)$, $(5, 2, -3) \perp (-2, -1, -4)$, ale $(1, 2, 3) \not\perp (-2, -1, -4)$.

   Relace kolmosti tudíž není tranzitivní (ani reflexivní, pouze symetrická).

4. Určete ortonormální bázi (pomocí G-S) řádkového prostoru následující matice a tu rozšiřte na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (10, 5, 13, 9)^T$

   Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé. O kolik je vaše řešení špatně (tj. spočítejte $b - Ax$)? (Metoda nejmenších čtverců se často používá, když jsou chyby hodně malé – ale s takovými se na cvičení na papíře špatně počítá). Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

6. Dokažte, že reálná norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Řešení: Rozepište levou stranu podle definice a použijte linearitu skalárního součinu.

   Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

   Řešení: Ne, použijte předchozí část cvičení.

Pro zvídavé Kontrola maticového násobení: máte program, který tvrdí, že umí násobit matice rychle. Stačí skontrolovat $Cx = A(Bx)$ kde C je výstup programu po násobení AB a x je náhodný $\{0, 1\}$ vektor správné délky. Dokažte, že pak pokud je C špatně, pak s pravděpodobností aspoň polovina rovnost $Cx = ABx$ neplatí.

4 Cvičení

1. Určete bázi ortogonálního doplňku řádkového prostoru matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   Řešení: Jedná se jen a pouze o kernel matice A (skalární součiny jsou nula – řešíme homogenní soustavu rovnic).

2. Povídání o determinantech – geometrická intuice a proč je tam znaménko permutace. Opakování definice a jak se počítají.

3. Spočítejte derminanty následujících reálných matic:

   $\begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Nejpve použijte řádkové úpravy. Determinant matice je 1001.

   $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je -9.

   $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 30.

   $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 2.

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je -4.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je -3.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je -16.

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 15.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 80.

4. Může být součet ortonormálních matic ortonormální matice?
5. Jaký je determinant ortonormální matice?

5 Domácí úkol (původní zadání)

(2 body) Určete vzdálenost bodu $A = (5,3,5,3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8,-1,1,-2)^T$ a $C = (4,-2,2,-1)^T$.

Řešení: Provedeme Gramm-Schmidtovu ortonormalizaci na vektory B, C a dostaneme: $\left(\frac{4}{35}\sqrt{70}, -\frac{1}{70}\sqrt{70}, \frac{1}{70}\sqrt{70}, -\frac{1}{35}\sqrt{70}\right), \left(-\frac{4}{17}\sqrt{\frac{17}{35}}, -\sqrt{\frac{17}{35}}, \sqrt{\frac{17}{35}}, \frac{1}{17}\sqrt{\frac{17}{35}}\right)$ Pak už stačí odečíst kolmý průmět bodu A do roviny generované vektory B, C.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{70}}{35} \\ -\frac{\sqrt{70}}{70} \\ \frac{\sqrt{70}}{70} \\ -\frac{\sqrt{70}}{35} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{70}}{35} \\ -\frac{\sqrt{70}}{70} \\ \frac{\sqrt{70}}{70} \\ -\frac{\sqrt{70}}{35} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{17}\sqrt{\frac{17}{35}} \\ -\sqrt{\frac{17}{35}} \\ \sqrt{\frac{17}{35}} \\ \frac{1}{17}\sqrt{\frac{17}{35}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{4}{17}\sqrt{\frac{17}{35}} \\ -\sqrt{\frac{17}{35}} \\ \sqrt{\frac{17}{35}} \\ \frac{1}{17}\sqrt{\frac{17}{35}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\frac{18}{35}\sqrt{35}\sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{70}}{35} \\ -\frac{\sqrt{70}}{70} \\ \frac{\sqrt{70}}{70} \\ -\frac{\sqrt{70}}{35} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{35}\sqrt{35}\sqrt{17}\right) \begin{pmatrix} -\frac{4}{17}\sqrt{\frac{17}{35}} \\ -\sqrt{\frac{17}{35}} \\ \sqrt{\frac{17}{35}} \\ \frac{1}{17}\sqrt{\frac{17}{35}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že bod A je 7 (norma posledního vektoru) daleko od dané roviny.

(4 body) Definujme sloupce matice B jako sloupce matice A po Gramm-Schmidtově ortonormalizaci. Pak spočítejte pomocí metody nejmenších čtverců přibližné řešení soustavy $Bx = b$ pro: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (10,5,13,9)^T$.

Matice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{26}{435}\sqrt{87}\sqrt{2} & -\frac{77}{86565}\sqrt{86565}\sqrt{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{23}{870}\sqrt{174} & \frac{25}{34626}\sqrt{34626}\sqrt{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{7}{290}\sqrt{58}\sqrt{3} & -\frac{5}{11542}\sqrt{11542}\sqrt{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{13}{435}\sqrt{87}\sqrt{2} & \frac{179}{86565}\sqrt{86565}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Řešení $Bx = b$ je

$$\begin{pmatrix} \frac{91}{5} \\ -\frac{61}{145}\sqrt{29}\sqrt{6} \\ \frac{222}{28855}\sqrt{28855}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

O kolik je vaše řešení chybné (tj. spočítejte $b - Bx$)?

$$b - Bx = \begin{pmatrix} -\frac{468}{995} \\ -\frac{260}{199} \\ \frac{156}{199} \\ \frac{416}{995} \end{pmatrix}$$

Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Samozřejmně, že nevyjdou. Se soustavou rovnic si nemůžeme dělat sloupcové úpravy bez rizika! Tento postup by šel opravit, ale vedlo by to na QR rozklad. Na druhou stranu chyba vyjde stejná!

6 Cvičení

1. Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následujícím maticím nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *Řešení:*

   Adjungovaná matice: $(\mathrm{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}|A^{j,i}|$, kde $A^{j,i}$ je matice vzniklá odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice A (všimněte si prohození indexů).

   Inverze se spočítá: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

   Nad $\mathbb{R}$

   $|A| = -1$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Nad $\mathbb{Z}_5$

   $|A| = -1 = 4$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *Řešení:*

   Nad $\mathbb{R}$

   $|A| = 4$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Nad $\mathbb{Z}_5$

$$|A| = 4\ ,\ \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:*

Nad $\mathbb{R}$

$$|A| = -5,\ \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 3/5 & -7/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Nad $\mathbb{Z}_5$

$|A| = 0$, tudíž A je singulární nad $\mathbb{Z}_5$ a A^{-1} neexistuje, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Spočítejte derminanty následujících matic nad $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Určete determinant reálné matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: První řádek přičteme ke všem ostatním. Dereminant matice je $n!$.

4. Určete determinanty následujících matic:

$\begin{pmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{pmatrix}$, *Řešení:*

Poslední řádek odečteme od všech předchozích (a zůstanou jedině na posledním řádku), poté k poslednímu sloupci přičteme všechny předchozí.

Determinant je roven $(a_1 + \dots + a_n + x)x^{n-1}$.

$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$, *Řešení:*

Eliminujeme prvky na diagonále tím, že odzadu přičteme k sloupci x-násobek jeho následníka. Na vedlejší diagonále zůstanou samé -1, a na spodním řádku dostaneme $a_0 + xa_1 + x^2a_2 +$

$\cdots + x^n a_n \ldots, a_{n-2} + x a_{n-1} + x^2 a_n, a_{n-1} + x a_n, a_n$. Jen jediná permutace dává nyní nenulový sčítanec.

Alternativně lze provést rozvoj podle prvního sloupce.

Determinant je roven $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i$.

$$\begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$ *Řešení:*

Označíme-li matici A_n, platí $|A_1| = a + 1$, $|A_2| = a^2 + a + 1$ a z rozvoje podle prvního sloupce dostaneme rekurenci $|A_n| = (a + 1)|A_{n-1}| - a|A_{n-2}|$. Ta už má jednoznačné řešení.

Determinant je roven $a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$.

5. Spočítejte determinanty matic

   $$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \\ \sin z & \cos z & 1 \end{pmatrix},$$ *Řešení:*

   Použijeme rozvoj podle posledního sloupce a vzorec $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

   Determinant matice je roven $\sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x)$.

   $$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x & \cos x \cos y & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin y & \cos y \end{pmatrix},$$ *Řešení:*

   Podle Sarrusova pravidla $\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y = 1$.

   Determinant matice je roven 1.

   $$\begin{pmatrix} 1 & \log_b a & \log_c a \\ \log_a b & 1 & \log_c b \\ \log_a c & \log_b c & 1 \end{pmatrix}$$ *Řešení:*

   Použijeme vzorec $\log_a b = \ln b / \ln a$, dále Sarrusovým pravidlem nebo převodem na jedničkovou matici.

   Determinant matice je roven 0.

6. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ je dělitelný 17.

   Řešení: Plyne z linearity determinantu vůči každému řádku. Čísla 697, 476 a 969 dostaneme, když stonásobek prvního a desetinásobek druhého sloupce přičeteme ke třetímu sloupci.

   Formálně: $$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 697 \\ 4 & 7 & 476 \\ 9 & 6 & 969 \end{vmatrix} = 17 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 & \frac{697}{17} \\ 4 & 7 & \frac{476}{17} \\ 9 & 6 & \frac{969}{17} \end{vmatrix}$$

   Poslední matice je celočíselná a má tedy celočíselný determinant.

7. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $a^T = (3,1,1)$, $b^T = (2,1,1)$ a $c^T = (2,3,2)$. (Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha a + \beta b + \gamma c$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$.)

   Řešení: Objem rovnoběžnostěnu udává absolutní hodnota determinantu, jehož sloupce tvoří vektory a, b, c neboli $V = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = |-1| = 1.$

   Objem rovnoběžnostěnu je 1.

8. Nechť lineární zobrazení $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory $a^T = (1,3,1), b^T = (1,0,3), c^T = (1,1,1)$ na vektory $f(a)^T = (3,1,0), f(b)^T = (1,0,2), f(c)^T = (4,1,5)$.

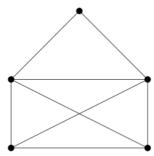
   Určete objem elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

   Řešení: Linární zobrazení splňuje $f(u) = [f]_{KK} u$ pro matici

$$[f]_{KK} = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

   Objemy těles při lineárním zobrazení se mění s koeficientem $|\det([f]_{KK})|$, čili $V(f(B_3)) = |\det([f]_{KK})| \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{|\det(B)|}{|\det(A)|} \cdot \frac{4}{3}\pi = \pi$

   Objem elipsoidu je roven π.

9. Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu: 

   Řešení: Laplaceova matice grafu je

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Podle věty o počtu koster je

$$\kappa(G) = \det(L^{1,1}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 19 & -9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 19 & -9 \end{vmatrix} = -4(9-19) = 40.$$

   Lze ověřit, že je tomu skutečně tak výčtem všech koster: K_4 má 16 koster a ke každé z nich jsou dvě možnosti, jak připojit horní vrchol (zprava, zleva) — celkem 32 možností. Jinak kostra obsahuje celou stříšku a v tom případ máme 4 možnosti, které obsahují základnu, a 4, které ji neobsahují.

   Graf má 40 koster.

7 Cvičení

1. Opakování důležitých věcí o vektorech, souřadnicích, bazích a ortonormálních bazích.

2. Určete determinant reálné matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}$.

   Řešení: První řádek přičteme ke všem ostatním. Determinant matice je $n!$.

3. Spočítejte determinanty následujících matic nad $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Určete determinanty následujících matic:

$$\begin{pmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{pmatrix}, \text{ \textit{Řešení:}}$$

Poslední řádek odečteme od všech předchozích (a zůstanou jedině na posledním řádku), poté k poslednímu sloupci přičteme všechny předchozí.

Determinant je roven $(a_1 + \dots + a_n + x)x^{n-1}$.

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \text{ \textit{Řešení:}}$$

Eliminujeme prvky na diagonále tím, že odzadu přičteme k sloupci x-násobek jeho následníka. Na vedlejší diagonále zůstanou samé -1, a na spodním řádku dostaneme $a_0 + xa_1 + x^2a_2 + \dots + x^n a_n \dots, a_{n-2} + xa_{n-1} + x^2a_n, a_{n-1} + xa_n, a_n$. Jen jediná permutace dává nyní nenulový sčítanec.

Alternativně lze provést rozvoj podle prvního sloupce.

Determinant je roven $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i$.

$$\begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \text{ \textit{Řešení:}}$$

Označíme-li matici A_n, platí $|A_1| = a+1$, $|A_2| = a^2+a+1$ a z rozvoje podle prvního sloupce dostaneme rekurenci $|A_n| = (a+1)|A_{n-1}| - a|A_{n-2}|$. Ta už má jednoznačné řešení.

Determinant je roven $a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$.

5. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $a^T = (3,1,1)$, $b^T = (2,1,1)$ a $c^T = (2,3,2)$. (Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha a + \beta b + \gamma c$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0,1 \rangle$.)

   Řešení: Objem rovnoběžnostěnu udává absolutní hodnota determinantu, jehož sloupce tvoří vektory a, b, c neboli $V = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = |-1| = 1$.

   Objem rovnoběžnostěnu je 1.

6. Nechť lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory $a^T = (1,3,1), b^T = (1,0,3), c^T = (1,1,1)$ na vektory $f(a)^T = (3,1,0), f(b)^T = (1,0,2), f(c)^T = (4,1,5)$.

   Určete objem elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

   Řešení: Linární zobrazení splňuje $f(u) = [f]_{KK}u$ pro matici

   $$[f]_{KK} = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

   Objemy těles při lineárním zobrazení se mění s koeficientem $|\det([f]_{KK})|$, čili $V(f(B_3)) = |\det([f]_{KK})| \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{|\det(B)|}{|\det(A)|} \cdot \frac{4}{3}\pi = \pi$

   Objem elipsoidu je roven π.

7. Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice nad tělesem $\mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, *Řešení:* Vlastní čísla λ_i matice A jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(t) = |A - tI|$.

   Vlastní vektory příslušné danému λ_i splňují rovnost $Ax = \lambda_i x$, neboli jsou řešením homogenní soustavy $(A - \lambda_i I)x = 0$. $\begin{vmatrix} 2-t & 6 \\ 6 & -3-t \end{vmatrix}, = t^2 + t - 42 = (t-6)(t+7)$ čili $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -7$

   Vlastní vektory spočítáme řešením příslušných soustav lineárních rovnic

   $$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

   kde dostaneme řešení $x = (x_1, x_2)^T = c \cdot (3,2)^T$.

   Pro druhé vlastní číslo -7

   $$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

   dostaneme řešení $x = c \cdot (2,-3)^T$.

   Matice těchto soustav jsou vždy singulární (tak jsou volena vlastní čísla), proto si všimněte, že u matic řádu 2 je vždy druhý řádek skalárním násobkem předchozího. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, *Řešení:* Matice je diagonalizovatelná právě když prostory vlastních vektorů mají dimenze rovny algebraickým násobnostem příslušných vlastních čísel.

Toto platí např. když je řádu n a má n různých vlastních čísel.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $x = c \cdot (1, 1, -1)^T$.

Není diagonalizovatelná. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *Řešení:* $\lambda_1 = 2$, $x_1 = c \cdot (0, 1, 3)^T$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $x_2 = c \cdot (1, 0, 1)^T$, $x_3 = c \cdot (1, 4, 0)^T$;

Je diagonalizovatelná. Diagonální tvar je například $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Řešení: Rozvojem podle 2. a 4. řádku a 3. sloupce dostaneme

$$\begin{vmatrix} 3-t & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-t & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-t & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)^2 \begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 4 & -3-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)^3(1+t)$$

Vlastní čísla jsou 2, 1 (trojnásobné) a -1.

8 Cvičení

1. Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice nad tělesem $\mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

   $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

   $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

2. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

   $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

9 Cvičení

1. Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině, nalezněte příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2. Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

   Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místím (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

   Řešení: Změny počtu hlasů lze modelovat lineárním zobrazním $f : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$, určené maticí F. (Musí platit vztah $x_{t+1} = f(x_t) = Fx_t$, kde x_t značí rozložení mandátů v t-tém volebním období)

   $$F = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,60 & 0,10 \\ 0,20 & 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}$$

   Matice F se nazývá stochastická matice, protože má sloupcové součty rovny 1. Všimněte si, že násobení vektoru takovou maticí zachovává souřadnicový součet vektoru. Navíc obraz vektoru, jehož souřadnice jsou nezáporné, je také nezáporný.

   Pro řešení úlohy musíme ověřit, že 1 je vlastní číslo matice F a najít příslušný vlastní vektor, neboli vyřešit soustavu $Fx = x$.

   Zlomků se při výpočtu můžeme zbavit, když dočasně vynásobíme celou matici 20, ale na závěr musíme pomocná vlastní čísla vydělit 20.

   $$F' = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

   Pro úplnost si spočítáme všechna vlastní čísla matic F' a F. První dvojice je $\lambda_1' = 20$, $\lambda_1 = 1$, druhá: $\lambda_2' = 12$, $\lambda_2 = 12/20$ a třetí : $\lambda_3' = 11$, $\lambda_3 = 11/20$.

   Hledáme takový vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 1$, jehož souřadnice dávají v součtu 1. Dostaneme limitní řešení: $x = (1/3, 1/6, 1/2)^T \doteq (33\%, 17\%, 50\%)^T$

   Jak vypadají ostatní vlastní vektory? Nutně musí mít souřadnicový součet nulový, jinak by se nemohly nechat "škálovat"vlastním číslem a zároveň zachovat souřadnicový součet. (Tudíž mají alespoň jednu souřadnici zápornou.)

   Řešením příslušných soustav je: $x = c \cdot (-2, 1, 1)^T, x = c \cdot (-1, 1, 0)^T$.

Proč libovolné rozdělění preferncí konverguje k limitnímu? Uvažme jen podmnožinu pravděpodobnostních vektorů, t.j. vektorů z konvexního obalu kanonické báze. Tyto vektory mají součet po souřadnicích roven 1 a všechny souřadnice jsou nezáporné. Lze ukázat, že na této množině je lineární zobrazení předepsané maticí F kontrakcí, neboli zkracuje normu rozdílu dvou takových vektorů. Při postupném aplikování zobrazení f lze vzdálenost mezi dvěma obrazy omezit shora geometrickou posloupností. Odtud už lze dokázat existenci a jednoznačnost limity, která existuje vždy, jakmile je kontrakce aplikovaná na kompaktní množině.

3. Rozložte následující matici na součin RJR^{-1}, kde matice R je regulární a matice J je v Jordanově normálním tvaru. $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Pokud je každé vlastní číslo jednonásobné, lze Jordanův rozklad RJR^{-1} sestrojit tak, že J je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a R obsahuje jako sloupce vlastní vektory.

   $\begin{vmatrix} -11-t & 30 \\ -10 & 24-t \end{vmatrix} = t^2 - 13t + 36 = (t-9)(t-4)$ čili $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.

   Pro $\lambda_1 = 9$ máme $-20x_1 + 30x_2 = 0$ s řešením $x = (x_1, x_2)^T = (3, 2)^T$.

   Pro $\lambda_2 = 4$ máme $-15x_1 + 30x_2 = 0$ s řešením $x = (2, 1)^T$.

   $R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Zobecněný vlastní vektor x_i lze získat ze soustavy $(A-\lambda I)x_i = x_{i-1}$.

   Charakteristický mnohočlen $p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)^2$.

   Soustava $(A - 2I)x^1 = 0$ má řešení $x^1 = p(1, 0, 1)^T$.

   Vlastní číslo $\lambda = 2$ má geometrickou násobnost 1 a algebraickou 2, musíme tedy hledat zobecněný vlastní vektor. V daších výpočtech budeme pracovat s volbou $p = 1$, čili $x^1 = (1, 0, 1)^T$.

   Zobecněný vlastní vektor x^2 získáme ze soustavy $(A - 2I)x^2 = x^1$. Její řešení je $x^2 = q(1, 0, 1)^T + (-1, 0, 0)^T$.

   Soustava $(A - 1I)x = 0$ má řešení $x^3 = r(2, -1, 1)^T$.

   Vhodnou volbou parametrů $q = 1$ a $r = 1$ získáme hledanou matici R. Také vypočteme její inverzi R^{-1}.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Danou matici lze zapsat pomocí Jordanova normálního tvaru např. jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = RJR^{-1}$$

10 Cvičení

1. Rozložte následující matici na součin RJR^{-1}, kde matice R je regulární a matice J je v Jordanově normálním tvaru.

   $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Pokud je každé vlastní číslo jednonásobné, lze Jordanův rozklad RJR^{-1} sestrojit tak, že J je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a R obsahuje jako sloupce vlastní vektory.

   $\begin{vmatrix} -11-t & 30 \\ -10 & 24-t \end{vmatrix} = t^2 - 13t + 36 = (t-9)(t-4)$ čili $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.

   Pro $\lambda_1 = 9$ máme $-20x_1 + 30x_2 = 0$ s řešením $x = (x_1, x_2)^T = (3, 2)^T$.

   Pro $\lambda_2 = 4$ máme $-15x_1 + 30x_2 = 0$ s řešením $x = (2, 1)^T$.

   $R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Zobecněný vlastní vektor x_i lze získat ze soustavy $(A - \lambda I)x_i = x_{i-1}$.

   Charakteristický mnohočlen $p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)^2$.

   Soustava $(A - 2I)x^1 = 0$ má řešení $x^1 = p(1, 0, 1)^T$.

   Vlastní číslo $\lambda = 2$ má geometrickou násobnost 1 a algebraickou 2, musíme tedy hledat zobecněný vlastní vektor. V daších výpočtech budeme pracovat s volbou $p = 1$, čili $x^1 = (1, 0, 1)^T$.

   Zobecněný vlastní vektor x^2 získáme ze soustavy $(A - 2I)x^2 = x^1$. Její řešení je $x^2 = q(1, 0, 1)^T + (-1, 0, 0)^T$.

Soustava $(A - 1I)x = 0$ má řešení $x^3 = r(2, -1, 1)^T$.

Vhodnou volbou parametrů $q = 1$ a $r = 1$ získáme hledanou matici R. Také vypočteme její inverzi R^{-1}.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Danou matici lze zapsat pomocí Jordanova normálního tvaru např. jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = RJR^{-1}$$

3. Vymysleme společně, jak rozložit matici A na součin $A = U^T U$, kde U je horní trojúhelníková matice (čtvercová). Vyzkoušejte na příkladech:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Musí to vždy jít? Musí takové matice být pozitivně definitní, to jest $x^T Ax > 0$ pro všechny nenulové vektory x?

11 Cvičení

1. Vymysleme společně, jak rozložit matici A na součin $A = U^T U$, kde U je horní trojúhelníková matice (čtvercová). Vyzkoušejte na příkladech:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Musí to vždy jít? Musí takové matice být pozitivně definitní, to jest $x^T Ax > 0$ pro všechny nenulové vektory x?

2. Rozložte následující matice na součin $A = U^T U$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}, \quad \textit{Řešení: } U = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 14 \end{pmatrix}, \quad \textit{Řešení: } U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 14 \end{pmatrix}, \quad \textit{Řešení: } U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \textit{Řešení: } U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$