1. Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následujícím maticím nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Spočítejte derminanty následujících matic nad $\mathbb{Z}_7$:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Určete determinant reálné matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}$.

4. Určete determinanty následujících matic:

$$\begin{pmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

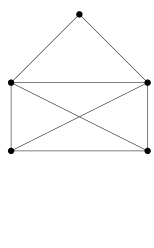
5. Spočítejte determinanty matic
$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \\ \sin z & \cos z & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x & \cos x \cos y & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \log_b a & \log_c a \\ \log_a b & 1 & \log_c b \\ \log_a c & \log_b c & 1 \end{pmatrix}$

6. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ je dělitelný 17.

7. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $a^T = (3,1,1)$, $b^T = (2,1,1)$ a $c^T = (2,3,2)$. (Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha a + \beta b + \gamma c$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$.)

8. Nechť lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory $a^T = (1,3,1), b^T = (1,0,3), c^T = (1,1,1)$ na vektory $f(a)^T = (3,1,0), f(b)^T = (1,0,2), f(c)^T = (4,1,5)$.

   Určete objem elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

9. Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu: 

Tohle je alternativní zadání první série domácích úkolů (vyjdou hezká čísla). Pokud jste vypracovali původní zadání, můžete odevzdat i toto a body se sečtou. Body z původního zadání se nepočítají do celkového součtu, tedy kdo odevzdal původní zadání má bonusové body k domácím úkolům. Původní zadání už nelze odevzdávat, řešení bude viset na webu.

(2 body) Určete vzdálenost bodu $A = (1, 1, 4, 0)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (2, 2, 4, 1)^T$ a $C = (0, 0, 2, 2)^T$.

(4 body) Definujme sloupce matice B jako sloupce matice A po Gramm-Schmidtově ortonormalizaci. Pak spočítejte pomocí metody nejmenších čtverců přibližné řešení soustavy $Bx = b$ pro: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = (6, 3, 4, 2)^T$. O kolik je vaše řešení chybné (tj. spočítejte $b - Bx$)?
Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Druhá série:

(2 body) Spočítejte determinant reálné matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(4 body) Spočítejte determinant matice nad $\mathbb{Z}_7$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.