Já jsem Karel, pro kterou přednášku cvičíme, jazyk cvičení, zápočet, jak se učit...

0. Kdo co potřebuje opakovat z minulého semestru.
1. Zopakujte definici skalárního součinu a všeho, co jste o něm slyšeli.
2. Spočítejte standardní skalární součin vektorů $(1,2,3)^T, (0,0,1)^T, (1,-2,1)^T$. Které z nich jsou navzájem kolmé? Jaká je délka prvního vektoru? Jak daleko jsou od sebe první a třetí vektor?
3. Označme řádky matice A jako vektory $v_1, \dots, v_m$ a sloupce matice B vektory $w_1, \dots, w_p$. Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice AB?

   Dokažte, že řádkový prostor a kernel jsou navzájem kolmé.
4. Pro skalární součin definovaný $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2 - 1$ a $5x^3 - 3x$ navzájem kolmé.
5. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:
   (a) (Standardní skal. souč.) V $\mathbb{R}^n$ definujeme $\langle x \mid y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
   (b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ definujeme $\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
6. O symetrické matici reálné A, pro kterou platí $x^T A x > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y\rangle = x^T A y$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A, která ho určuje.

   Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.
7. Dokažte, že všechny vektory $v \in \mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1,0,-3)^T|v\rangle = 0$ tvoří vektorový prostor. Jinak řečeno $\left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | \langle (1,0,-3)^T|v\rangle = 0\right\}$ tvoří vektorový prostor.

   Dokažte, že všechny vektory z $\mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1,0,-3)^T|v\rangle = 2$ tvoří afinní prostor (a to rovinu).
8. Mějme dva vektory $(2,5)^T, (3,1)^T$, co musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Co musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?
9. Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

Pro zvídavé Dokažte, že v rovině neexistují čtyři body, tak že vzdálenosti mezi nimi jsou celá lichá čísla (mohou a nemusí být všechna stejná).