

1. Počítejte řešení následujících soustav rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Vymyslete, jak reprezentovat elementární úpravy násobením matic. Umíte rozložit matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice?
3. Vymyslete, jak rychle mocnit číslo. Například spočítejte (na papíře), kolik je  $3^{16}$  s použitím co nejméně násobení. Co by bylo třeba upravit, kdybychom měli exponent, který není mocninou dvojkdy?
4. Vymyslete, jak násobením matic reprezentovat počítání Fibonacciho čísel. Fibonacciho čísla jsou daná jako  $F_1 = F_2 = 1$  a pak  $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ . Jak bychom to mohli použít k jejich rychlému počítání? (Ná pověda: obdobný postup jako v předchozím příkladě.)

5. Invertujte následující matice:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Naučte se počítat v  $GF(p)$  (také značeno  $\mathbb{Z}_p$ ) pro  $p$  prvočíslo.

Příklady pro početně zdatné:

7. Pokud soustava rovnic má řešení, tak ho umíme najít a umíme ověřit, že řešení je řešením (zkouška). Tedy jedno takové řešení je "svědek" toho, že soustava je řešitelná. Vymyslete "svědku" toho, že soustava žádné řešení nemá. (Poznámka: se "svědky" neboli certifikáty něčeho se v informatice velice často setkáváme, například v teorii složitosti.)