7. 12. bude velká písemka!

1. Ukažte, že pokud je V podprostorem prostoru W konečné dimenze, pak pro každou bázi X prostoru V existuje báze Y prostoru W taková, že $X \subset Y$.

2. Jsou-li V, W podprostory konečné dimenze, pak

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(\mathcal{L}(U \cup V)) + \dim(U \cap V).$$

   A ukažte, že toto pro tři podprostory neplatí!

3. Invertujte matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^4$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

   (b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

   (c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

5. Určete matici derivace polynomů stupně nejvýš 4.

6. Určete matice různých lineárních zobrazení v rovině.

(5 bodu) Pracujte nad $\mathbb{Z}_5$. Proveďte LU dekompozici a pomocí ní vyřešte soustavu $Ax = b$, kde $b = (3, 1, 4)^T$ a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 bodu) Určete dimenzi vektorového podprostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $(1, 2, 3)^T$, $(-1, 0, -2)^T$, $(-2, 4, -2)^T$. Případně ho doplňte na bázi celého prostoru a určete souřadnice vektoru $(2, 8, 2)^T$.

Pro ty, kteří nebyli na cvičení souřadnice jsou koeficienty lineární kombinace. Například pro dimenzi tři a bázi $B = (u_1, u_2, u_3)$: pokud platí, že $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, pak souřadnice vektoru x vůči bázi B jsou $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.