1. Nechť V je vektorový prostor a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, jestli jsou následující tvrzení pravdivá:
   (a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.
   (b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.
   (c) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.
   (d) Je-li X závislá, je Y závislá.
   (e) Je-li Y závislá, je X závislá.
2. Doplňte následující množiny na bázi.
   (a) $\left\{(1,2,0,0)^T,(2,1,1,3)^T,(0,1,0,1)^T\right\}$ v $\mathbb{R}^4$.
   (b) $\left\{x^2, x^3-1, x+x^2\right\}$ v prostoru polynomů stupně nejvýš tři.
3. Určete bázi a dimenzi podprostoru $\mathbb{Z}_5^4$ generovaného vektory $(1,2,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$, $(2,1,4,2)^T$, $(1,1,2,0)^T$. Pokud tento podprostor není celým $\mathbb{Z}_5^4$, doplňte ho aby byl bází celého prostoru.
4. Napište souřadnice vektoru $(3,1,4,5)^T$ vzhledem k uspořádané bázi z předchozího příkladu.
5. Ukažte, že pokud je V podprostorem prostoru W konečné dimenze, pak pro každou bázi X prostoru V existuje báze Y prostoru W taková, že $X \subset Y$.
6. Jsou-li V, W podprostory konečné dimenze, pak
$$\dim(U)+\dim(V)=\dim(\mathcal{L}(U\cup V))+\dim(U\cap V).$$
   A ukažte, že toto pro tři podprostory neplatí!

Pokud chcete své body zobrazené na stránce cvičení, zvolte si svou přezdívku a napište mi ji vedle svého jména.

(5 bodu) Pracujte nad $\mathbb{Z}_5$. Proveďte LU dekompozici a pomocí ní vyřešte soustavu $Ax = b$, kde $b = (3, 1, 4)^T$ a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 bodu) Určete dimenzi vektorového podprostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $(1, 2, 3)^T$, $(-1, 0, -2)^T$, $(-2, 4, -2)^T$. Případně ho doplňte na bázi a vůči té určete souřadnice vektoru $(2, 8, 2)T$.

Pro ty, kteří nebyli na cvičení souřadnice jsou koeficienty lineární kombinace. Například pro dimenzi tři a bázi $B = (u_1, u_2, u_3)$: pokud platí, že $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, pak souřadnice vektoru x vůči bázi B jsou $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.