NTIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2022/2023**

1. domácí úlohy - Markovovský proces

do 2. listopadu 2022

Úloha 1. Mějme ireducibilní aperiodický Markovovský proces s maticí přechodu P. Ukažtě, že

a) pro každé i a j existuje M takové, že pro všechna $t \geq M$, $p_{i,j}^{(t)} > 0$.

b) existuje M takové že pro všechna $t > M$, $\min_{i,j} p_{i,j}^{(t)} > 0$.

c) existuje M takové, že $\inf_{t \geq M} \min_{i,j} p_{i,j}^{(t)} > 0$.

(První dvě tvrzení by měla být dokázána bez použití vět o Markovovských procesech.)

Úloha 2. Uvažujme Markovovský proces $X_0, X_1, X_2, \ldots$ se stavy $\{1, 2, 3\}$ a maticí přechodu P. Nalezněte funkci $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ a matici P takovou, že $f(X_0), f(X_1), f(X_2), \ldots$ není Markovovský proces.

Úloha 3.

a) Nalezněte Markovovský proces, který má dvě různé stacionární distribuce.

b) Za použití faktu, že aperiodický a ireducibilní Markovovský proces má právě jednu stacionární distribuci, ukažte, že každý ireducibilní Markovovský proces má právě jednu stacionární distribuci.

Úloha 4. Uvažujme pohyb krále po šachovnici: v každém kroku náhodně uniformě vybereme jeden z jeho možných tahů a ten provedeme. Definujte příslušný Markovovský proces a nalezněte jeho stacionární distribuci.

Úloha 5. Mějme klobouk s pěti míčky různách barev. Provádíme následující náhodný proces: z klobouku vytáhneme náhodně míček a po něm náhodně druhý, který přebarvíme na barvu toho prvního. Jaká je očekávaná doba než budou všechny míčky stejné barvy? Použijte co nejjedodušší výpočet a analyzujte proces se stavy $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, (5).