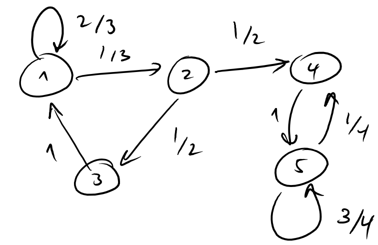
- sběratel kupónů
- míchání karet
- samouspořádající se seznamy
- generování náhodného obarvení grafu

Markovovský proces:

Př:



$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

- Markovovský proces s maticí přechodu $P = (p_{ij})$
  množina stavů $S = \{1, \dots, n\}$
  náhodné proměnné $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$
  splňující $\forall t \geq 1, \forall i, j \in \{1, \dots n\}$
  $$\Pr[X_t = j \mid X_{t-1} = i] = p_{ij}$$
- počáteční rozdělení mark. procesu $p \in [0,1]^n$
  t.ž. $p_i = \Pr[X_0 = i]$
- $\Pr[X_t = j \mid X_{t-1} = i \,\&\, X_{t-2} = k \,\&\, \dots] = \Pr[X_t = j \mid X_{t-1} = i]$
- $\Pr[X_{t+2} = j \mid X_t = i] = ?$
  $$= \sum_{k \in S} \Pr[X_{t+1} = k \mid X_t = i] \cdot \Pr[X_{t+2} = j \mid X_t = i \,\&\, X_{t+1} = k]$$
  $$= \sum_{k \in S} \Pr[X_{t+1} = k \mid X_t = i] \cdot \Pr[X_{t+2} = j \mid X_{t+1} = k]$$
  $$= \sum_{k \in S} p_{ik} \cdot p_{kj}$$

$\to \left(P^t\right)_{ij} = \Pr[X_t = j \mid X_0 = i]$

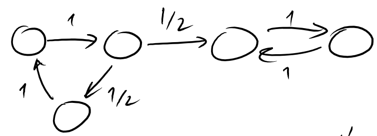
- rozdělení po t krocích: $p^{(t)} = p \cdot P^t$

- stav je rekurentní, pokud
  $$\Pr[\exists t,\ X_t = i \mid X_0 = i] = 1$$
  jinak je přechodný
- perioda stavu i … $\gcd\{t;\ t \geq 1,\ P^{(t)}_{ii} > 0\}$

jinak je přechodný

- perioda stavu i ... $\gcd\{t;\ t \geq 1,\ p_{ii}^{(t)} > 0\}$

Př:



- stavy i a j komunikují, pokud $\exists t, t' > 0$ t.ž. $p_{ij}^{(t)} > 0$ & $p_{ji}^{(t')} > 0$.
- markovský proces je ireducibilní pokud všechny stavy spolu navzájem komunikují.
- m.p. je aperiodický pokud perioda všech stavů je 1.

→ zajímají nás ireducibilní, aperiodické markovské řetězce (= ergodické)

- doba přechodu z i do j – pro $X_0 = i, X_1, X_2, \dots$ náhodná proměnná $T_{ij} = \min\{t \geq 1;\ X_t = j\}$ ... může být nekonečná ∞.
- očekávaná doba přechodu i do j

$$m_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}]$$

pokud $i = j$, pak očekávaná doba návratu m_{ii}.

Lema: Pro každý ired., aperiod. m.p. $X_0, X_1, \dots$ s množinou stavů $S = \{1, \dots, n\}$ a maticí přechodu P, $\forall i,j \in S$ $\mathbb{E}[T_{ij}] < \infty$.

Dk: $\exists M \geq 0$ t.ž. $\forall i,j$ $p_{ij}^{(M)} > 0$ (DÚ)

zvol pevné takové M, polož $\alpha = \min_{i,j} p_{ij}^{(M)}$

- zřejmě $\alpha > 0$,
- $\forall t \geq 0$ $\Pr[X_{t+M} = j \mid X_t \neq j] \geq \alpha$

$\Pr[X_{t+M} \neq j \mid X_t \neq j] \leq 1 - \alpha$

$\forall r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Pr[T_{ij} > rM] &\leq \Pr[X_M \neq j \ \&\ X_{2M} \neq j \ \&\ \dots \ \&\ X_{rM} \neq j] \\ &= \Pr[X_M \neq j] \cdot \Pr[X_{2M} \neq j \mid X_M \neq j] \cdots \\ &\quad \cdots \Pr[X_{rM} \neq j \mid X_{(r-1)M} \neq j] \\ &\leq (1-\alpha)^r\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[T_{ij}] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[T_{ij} = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[T_{ij} \geq k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[T_{ij} > k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[T_{ij} > k]$$

$$\le \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=\ell m}^{(\ell+1)m-1} \Pr[T_{ij} > k]$$

$$\le \sum_{\ell=0}^{\infty} m \cdot \Pr[T_{ij} > \ell m]$$

$$\le m \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\ell} \le m \cdot \frac{1}{\alpha} \qquad \blacksquare$$

Def: Mějme m.p. $X_0, X_1, X_2, \dots$ s množinou stavů $\{1,\dots,n\}$ a maticí přechodu P. Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ je stacionární distribuce tohoto m.p., pokud

(1) $\forall i \quad \pi_i \ge 0$ & $\sum_i \pi_i = 1$

(2) $\pi P = \pi$, t.j. $\forall j \quad \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$

Věta: Mějme ired., aperiod. m.p. s maticí přechodu P.

(a) $\exists! \pi$ t.ž. $\pi = \pi P$ (existuje stacionární distribuce)

(b) $\forall i,j \quad \lim_{t\to\infty} \Pr[X_t = j \mid X_0 = i] = \pi_j$

(c) $E[T_{ii}] = \frac{1}{\pi_i}$.

Dk: nejprve ukážeme $\lim_{t\to\infty} |p_{ij} - p_{i'j}| \to 0 \quad \forall i,i',j$

Párování

$X_0 = i, X_1, X_2, X_3 \dots$ dvě nezávislé kopie
$Y_0 = i', Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ téhož m.p.

interpretujeme jej jako $Z_t = (X_t, Y_t)$ ... m.p. s n^2 stavy

protože X_t i Y_t jsou ired. a aperiod.

$\exists M$ t.ž. $\forall i, i', j, j'$

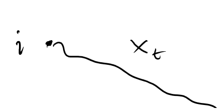
$$\Pr[Z_M = (j,j') \mid Z_0 = (i,i')] > 0$$

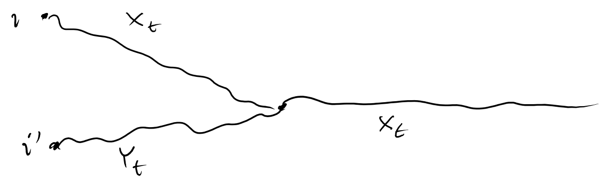
$$\alpha = \min_{(i,i'),(j,j')} \Pr[Z_M = (j,j') \mid Z_0 = (i,i')]$$

$T = \min\{t \ge 0;\ Z_t = (k,k)$ pro nějaké $k \in \{1,\dots,n\}, Z_0 = (i,i')\}$

z minula: $\Pr[T > rM] \le (1-\alpha)^r \quad \forall r \ge 1$

definujeme Z': $Z'_t = \begin{cases} (X_t, Y_t) & t < T \\ (X_t, X_t) & t \ge T \end{cases}$





je zřejmé, že proces Z' má rozdělení jako X
a zároveň jako $\underline{Y}$!

<u>Tvrdíme</u>: $\forall t, \ \left| p_{i,j}^{(t)} - p_{i',j}^{(t)} \right| \leq \Pr[T > t]$

$$
\begin{aligned}
p_{i,j}^{(t)} &= \Pr[X_t = j] \\
&= \Pr[X_t = j \ \& \ T \leq t] + \Pr[X_t = j \ \& \ T > t] \\
&= \Pr[Y_t = j \ \& \ T \leq t] + \Pr[X_t = j \ \& \ T > t] \\
&\leq \Pr[Y_t = j] + \Pr[T > t] \\
&= p_{i',j}^{(t)} + \Pr[T > t]
\end{aligned}
$$

obdobně $\quad p_{i',j}^{(t)} \leq p_{i,j}^{(t)} + \Pr[T > t]$

$$\Rightarrow \quad \left| p_{ij}^{(t)} - p_{i',j}^{(t)} \right| \leq \Pr[T > t]$$

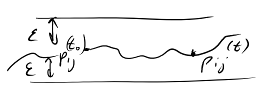
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0 \ \forall t > t_0, \forall i, i', j \ \left| p_{i,j}^{(t)} - p_{i',j}^{(t)} \right| \leq \varepsilon$$

$$\longrightarrow \lim_{t \to \infty} \left| p_{i,j}^{(t)} - p_{i',j}^{(t)} \right| = 0.$$

Nyní ukážeme, že $\lim\limits_{t \to \infty} p_{i,j}^{(t)}$ existuje.

Nechť t_0 je jako výše, pak $\forall t > t_0$

$$\left| p_{i,j}^{(t)} - p_{i,j}^{(t_0)} \right| \leq \varepsilon \ :$$



$$p_{ij}^{(t)} = \sum_k p_{ik}^{(t-t_0)} \cdot p_{kj}^{(t_0)}$$

$$\sum_k p_{ik}^{(t-t_0)} \left(p_{ij}^{(t_0)} - \varepsilon\right) \leq \sum_k p_{ik}^{(t-t_0)} \cdot p_{kj}^{(t_0)} \leq \sum_\ell p_{ik}^{(t-t_0)} \cdot \left(p_{ij}^{(t_0)} + \varepsilon\right)$$

$$\left(p_{ij}^{(t_0)} - \varepsilon\right) \underbrace{\sum_k p_{ik}^{(t-t_0)}}_{=1} \leq p_{ij}^{(t)} \leq \left(p_{ij}^{(t_0)} + \varepsilon\right) \underbrace{\sum_k p_{ik}^{(t-t_0)}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \quad \left| p_{ij}^{(t)} - p_{ij}^{(t_0)} \right| < \varepsilon \qquad \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{t \to \infty} p_{ij}^{(t)}.$$

<u>polož:</u> $\quad \pi_j = \lim\limits_{t \to \infty} p_{1j}^{(t)} = \lim\limits_{t \to \infty} p_{ij}^{(t)}$

$(\pi_1, \ldots \pi_j)$ je zjevně pstní rozdělení

$$\forall j \qquad p_{i,j}^{(t+1)} = \sum_k p_{ik}^{(t)} \cdot p_{kj}$$

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} p_{ij}^{(t+1)} = \sum_k p_{kj} \lim_{t \to \infty} p_{i,k}^{(t)} = \sum_k p_{kj} \pi_k$$

$\forall j$

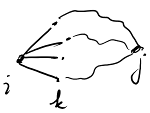
$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t+1)} = \sum_k p_{kj} \lim_{t\to\infty} p_{ik}^{(t)} = \sum p_{kj}\pi_k = \sum_k \pi_k p_{kj}$$

$\longrightarrow \quad \pi = \pi P$ a) b) ✓

c) $E[T_{ii}] = \frac{1}{\pi_i}$

$m_{ij} = E[T_{ij}]$ Víme, že $m_{ij} < \infty$

zřejmě: $m_{ij} = 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik} m_{kj}$



$$\Rightarrow \sum_i \pi_i m_{ij} = 1 + \sum_i \pi_i \sum_{k\neq j} p_{ik} m_{kj}$$

$$= 1 + \sum_{k\neq j} \underbrace{\left(\sum_i \pi_i p_{ik}\right)}_{\pi_k} m_{kj} = 1 + \sum_{k\neq j} \pi_k m_{kj}$$

$$\Rightarrow \pi_i m_{ii} = 1 \Rightarrow m_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$ ■

Jak hledat π:

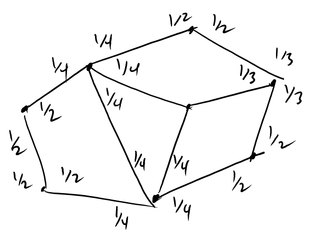
pokud pro nějaké $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n)$ pravd. rozdělení

$\forall i,j \quad \pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$

pak π je stacionární rozdělení.

Takovým m.p. se říká (časově) reverzibilní.

Př:

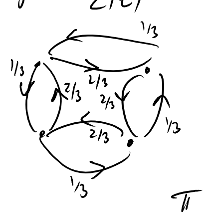


náhodná procházka na neorientovaném grafu

$$\pi_i = \frac{\deg i}{2|E|} \qquad p_{ij} = \begin{cases} 1/\deg i & i \sim j \\ 0 & i \not\sim j \end{cases}$$

$$\pi_i p_{ij} = \frac{1}{2|E|} = \pi_j p_{ji}$$ ■

Př:



není časově reverzibilní

$\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

Spojový seznam

n ... prvků, p_i ... pst. vyhledání prvku i.

pokud $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \dots \geq p_n$ pak $\mathbb{E}[A] = \sum^n p_i \cdot i$

pokud $p_1 \ge p_2 \ge p_3 \dots \ge p_n$ pak $\mathbb{E}[A] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot i$

optimální uspořádání

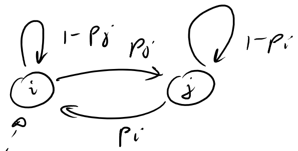
$1 \to 2 \to 3 \cdots \to n$

problém – neznáme p_i → move-to-front pravidlo

→ vyhledaný prvek přesuň na začátek seznamu

→ seznam se chová jako m.p. se $n!$ stavy

uvažujme ale



"i je v seznamu před j"

$p_i, p_j \neq 0$ – aper., ired.

$$[\pi_i, \pi_j] \begin{bmatrix} 1-p_j & p_j \\ p_i & 1-p_i \end{bmatrix} = [\pi_i, \pi_j]$$

$$\pi_i = \frac{p_i}{p_i+p_j} \qquad \pi_j = \frac{p_j}{p_i+p_j}$$

$D_i^{(t)}$ ... hloubka i-tého prvku po t přístupech

$$\mathbb{E}[A_t] = \sum_i p_i \, \mathbb{E}[D_i^{(t)}]$$

$\uparrow$ čas t-tého přístupu

$$= \sum_i p_i \Big(1 + \sum_{j \neq i} \Pr[j \text{ je před } i \text{ po } t \text{ přístupech}]\Big)$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[A_t] = \sum_i p_i \Big(1 + \sum_{j\neq i} \lim_{t\to\infty} \Pr[j \text{ je před } i \text{ po } t \text{ krocích}]\Big)$$

$$= \sum_i p_i \Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{p_j}{p_i+p_j}\Big)$$

$$= 1 + \sum_{i\neq j} \frac{p_i p_j}{p_i+p_j}$$

$$= 1 + 2\sum_i p_i \sum_{j<i} \frac{p_j}{p_i+p_j}$$

$$\le 1 + 2\sum p_i (i-1)$$

$$< 2 \sum i \, p_i$$

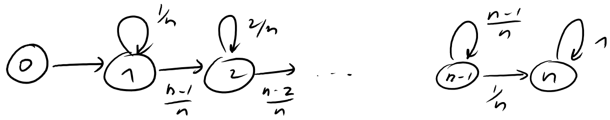
$$\longrightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[A_t] \le 2\,\mathbb{E}[A]$$

Michal Koucky at 17. 3. 2016 21:58

- sběratel kupónů

Michal Koucky at 17. 3. 2016 21:58

• sběratel kupónů



$p_{i,i+1} = \frac{n-i}{n}$ $\qquad p_{i,i} = \frac{i}{n}$

$N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots N_{n-1} + 1$

N ... čas přechodu z $0 \to n$
N_i ... čas strávený v i

$Pr[N_i \geq k] = \left(\frac{i}{n}\right)^{k-1} \qquad \forall k, i \geq 1$

$\mathbb{E}[N_i] = \sum_{k \geq 1} Pr[N_i \geq k] = \frac{1}{1 - \frac{i}{n}} = \frac{n}{n-i}$.

$\mathbb{E}[N_i] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[N_i] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i} = n \cdot H_n$

$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \qquad H_n \sim \ln n$

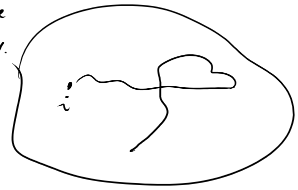
Procházky na grafech

$G = (V, E)$

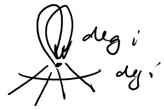
• časy přechodu T_{ij}
• čas pokrytí T_i při začátku ve vrcholu $i \in V$

$T_i = \min\{t, \{X_0, X_1, .. X_t\} = V;\ X_0 = i\}$

• mixing time
... rychlost konvergence
ke stacionárnímu rozd.



→ v každém vrcholu i přidáme
deg i smyček, abychom měli
aperiodický m.p.

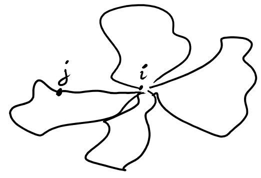


• stacionární distribuce $\pi_i = \frac{\deg i}{2|E|}$

$\mathbb{E}[T_{ii}] = \frac{2|E|}{\deg i}$

• $T_{iji} \overset{st}{=} T_{ij} + T_{ji}$

p ... pst, že během návratu do i navštívíme j.



$T_{i,i}^{-j}$ ... střední doba návratu do i za podmínky nenavštívení j během procházky $i \to i$

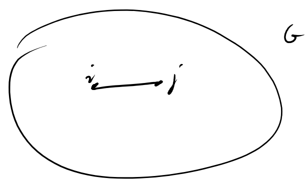
$T_{i,i}^{+j}$ ... střední doba návratu do i za podmínky navštívení j během procházky $i \to i$

$$\mathbb{E}[T_{i,i}] = (1-p)\,T_{i,i}^{-j} + p\,T_{i,i}^{+j} \qquad [p \in (0,1)]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{i,j,i}] &= \sum_{k \geq 0} (1-p)^k \cdot p \left[k \cdot T_{i,i}^{-j} + T_{i,i}^{+j} \right] \\
&= T_{i,i}^{-j} \Big(\underbrace{\sum_{k \geq 0} (1-p)^k k}_{} \Big) \cdot p + p \cdot T_{i,i}^{+j} \sum_{k \geq 0} (1-p)^k \\
&= T_{i,i}^{-j} \cdot \frac{1-p}{p} + T_{i,i}^{+j}\, p \cdot \frac{1}{p} \\
&= T_{i,i}^{-j}\, \frac{1-p}{p} + T_{i,i}^{+j} \\
&= \frac{\mathbb{E}[T_{i,i}]}{p}
\end{aligned}$$

- Všimni si, střední počet návratů do i, než navštívím j je $\frac{1}{p} - 1$.

Př:



$i \sim j$

$$p \geq \frac{1}{\deg i}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[T_{i,j,i}] \leq \mathbb{E}[T_{i,i}] \cdot \deg i = 2|E|. \quad \blacksquare$$

Př: $\Delta(i,j)$ ... vzdálenost i a j

$$\mathbb{E}[T_{ij}] + \mathbb{E}[T_{ji}] \leq \Delta(i,j) \cdot 2|E|$$

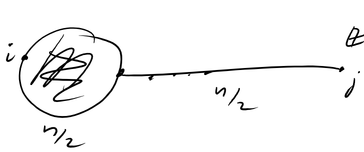
Dk: $i = v_0 \sim v_1 \sim v_2 \sim \ldots \sim v_k = j \qquad k = \Delta(i,j)$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{ij}] &\leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[T_{v_{i-1}, v_i}] \\
\mathbb{E}[T_{ji}] &\leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[T_{v_i, v_{i-1}}]
\end{aligned}\right\} \leq k \cdot 2|E|$$

$$T_{ij} \leq T_{v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k} \quad \blacksquare$$

$\to \max T_{ij} \leq n \cdot 2|E|$

lízátko



$\mathbb{E}[T_{ij}] = \Theta(n^3)$

$\to$ doba pokrytí

$$\mathbb{E}[T_i] \leq (n-1) \cdot 2|E|$$

$\to$ uvážíme kostru G a Eulerovský ...

procházku podél této kostry, každá hrana je projita tam i zpět za střední dobu $\leq 2|E|$.

Věta: (Matthews)
Mějme graf $G=(V,E)$ a množinu $A=\{a_1,\ldots,a_k\} \subseteq V$, a_0. Vezměme náhodnou procházku počínající v a_0. Nechť T je doba, za kterou navštíví všechny vrcholy v A (doba pokrytí A). Pak

$$\mu_-(A)\cdot H_k \leq \mathbb{E}[T] \leq \mu_+(A)\cdot H_k,$$

kde $H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$, $\quad \mu_-(A) = \min_{u,v\in A} \mathbb{E}[T_{u,v}]$

$$\mu_+(A) = \max_{u,v\in A} \mathbb{E}[T_{u,v}].$$

Dokážeme nejprve slabší verzi:

$$\mathbb{E}[T] \leq 4\cdot\mu_+(V)\cdot\lg(n+1)$$

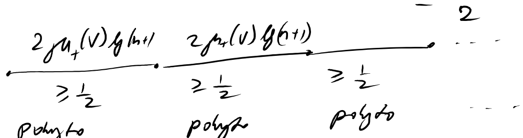
Dk: $\forall u,v\in V \quad \Pr[\text{procházka z } u \text{ navštíví } v \text{ během } 2\mu_+(V) \text{ kroků}] \geq \frac{1}{2}$

- Markov: $\Pr[T_{uv} > 2\,\mathbb{E}[T_{uv}]] \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \Pr[\text{procházka z } u \text{ nenavštíví } v \text{ během } 2\mu_+(V)\cdot\ell \text{ kroků}] \leq \frac{1}{2^\ell}$

$\Rightarrow \Pr[\text{procházka z } u \text{ nenavštíví } v \text{ během } 2\mu_+(V)\lg(n+1) \text{ kroků}] \leq \frac{1}{2n}$.

$\Rightarrow \Pr[\text{procházka z } u \text{ nepokryje } V \text{ během } 2\mu_+(V)\lg(n+1) \text{ kroků}] \leq \frac{1}{2}$



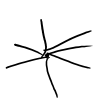
průměrný počet opakování, než pokryjí ≤ 2

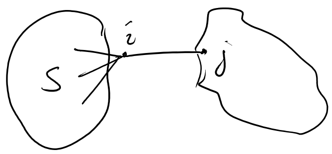
$\Rightarrow 4\cdot\mu_+(V)\lg(n+1)$ ∎

Náhodné procházky na stromech

$$\mathbb{E}[T] \leq 2\cdot|V|\cdot|E| \leq 2n^2$$

Př:  $\Theta(n^2)$

 $\Theta(n\lg n)$



[Moon]: $i \sim j$; $\mathbb{E}[T_{ij}] = 2|S| - 1$

Dk.: N ... počet návratů do i, než přejdu $i \to j$

$$\Pr[N=k] = \frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{d}\right)^k \qquad k \geq 1$$

$$d = \deg i$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[N=k]\cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{d}\right)^k = d-1$$

T_{ii}^S ... doba návratu do i, když neopouštím S

$$\mathbb{E}[T_{ii}] = \frac{2(|S|-1)}{d-1} \leftarrow 1/\text{stacionární na } S$$

$$\mathbb{E}[N]\cdot\mathbb{E}[T_{ii}] + 1 = 2(|S|-1)+1 = 2|S|-1 \qquad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ i,j ve vzdálenosti Δ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[T_{ij}] \leq (2n-3)\Delta$.

Př: d-ární zakořeněný strom

$$\Delta \leq 2 \lg_d n$$

$$\mathbb{E}[T_{ij}] \leq (2n-3) \lg_d n$$

(Matthews) $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[T] \leq \dfrac{4n \cdot \lg^2 n}{\lg d}$

- pro $i \rightsquigarrow j$ $\quad \mathbb{E}[T_{ij}] \geq d(i,j)^2$

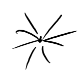
- strom s L listy
  - první list i $\Rightarrow$ $\exists$ list ve vzdálenosti $\geq \dfrac{n-1}{L-1}$

    očekávaná doba pokrytí stromu z i

    $$\mathbb{E}[T_i] \geq \frac{(n-1)^2}{(L-1)^2}$$

  - první list j $\quad \mathbb{E}[T_{ij}] \geq 2n-3$ [Moon]

    (Matthews) $\rightarrow$ $\mathbb{E}[T_i] \geq (2n-3)\, H_L$

    těsné pro 

pro všechny stromy

$$\mathbb{E}[T_i] \geq \min_{\substack{2 \leq u \leq n-1 \\ u \text{ celé}}} \max\left((2n-3)(\ln u - 1), \frac{(n-1)^2}{(u-1)^2}\right)$$

$$n \ln u = \frac{n^2}{u^2} \rightarrow u \sim \sqrt{\frac{n}{\lg n}}$$

$$\mathbb{E}[T_i] \geq \Omega(n \log n).$$

Věta [Matthews]: Mějme graf $G=(V,E)$ a $A=\{a_0 \dots a_k\} \subseteq V$. Uvažujme náhodnou procházku na G začínající v a_0. Nechť T je čas za který navštívíme všechny vrcholy v A. Pak

$$\mu_-(A) \cdot H_k \leq \mathbb{E}[T] \leq \mu_+(A) \cdot H_k,$$

kde $H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ a $\mu_+(A) = \max_{i \neq j} \mathbb{E}[T_{a_i, a_j}]$

$$\mu_-(A) = \min_{i \neq j} \mathbb{E}[T_{a_i, a_j}].$$

$H_k = \ln n + o(1)$

Dk: vezměme si náhodnou permutaci $s_1, \dots s_k$

def. n.p. $Y_i = \{a_{s_1}, a_{s_2}, \dots a_{s_i}\}$

Nechť S_i je čas, kdy jsou všechny vrcholy v Y_i pokryty. Nechť $S_0 = 0$.

Polož $R_i = S_i - S_{i-1}$

zřejmě $T = S_k = \sum_{i=1}^{k} R_i$

1) $\Pr[R_i \neq 0] = \frac{1}{i}$

$R_i \neq 0$ iff a_{s_i} je navštíveno po Y_{i-1}.

Podmíněno danou procházkou a danou množinou $Y_i = \{y_1, \dots y_i\}$, pravděpodobnost, že a_{s_i} není v Y_{i-1} je $\frac{1}{i}$.

2) podmíněno výběrem $s_1, \dots s_k$, procházkou až do času S_{i-1}, kde a_{s_i} není pokryto $\leq S_{i-1}$, nechť $a_j = X_{S_{i-1}}$. Pak

$$\mathbb{E}[R_i \mid R_i \neq 0] = \mathbb{E}[T_{a_j, a_{s_i}}]$$

$$\Rightarrow \mu_-(A) \leq \mathbb{E}[R_i \mid R_i \neq 0] \leq \mu_+(A)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[R_i] = \left(1 - \frac{1}{i}\right) \cdot 0 + \frac{1}{i} \mathbb{E}[R_i \mid R_i \neq 0]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \mu_-(A) \leq \mathbb{E}[T] \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \mu_+(A) \quad \blacksquare$$

Př: 2-SAT

$$\psi = (x_1 \vee \neg x_7) \,\&\, (\neg x_8 \vee \neg x_2) \,\&\, \dots (x_{20} \vee x_{30})$$

Je ψ splnitelná?

Alg. pro 2-SAT

polož ohodnocení proměnných $a_0 = 0^n$.

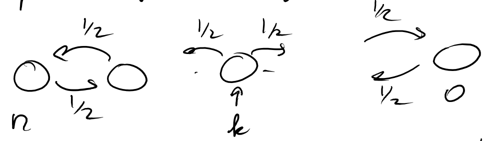
Pro $i = 0 \dots n^3$ ... odpověz YES

pokud a_i splňuje ψ, zastav a odpověz.
jinak vyber (libovolnou) nesplněnou disjunkci
a z ní <u>náhodně</u> proměnnou j.
Polož $a_{i+1} = a_i \oplus e_j$ $\quad e_j = (\underbrace{0\dots 010 \dots 0}_{j})$
Pokud a_{n^3} nesplňuje ψ, odpověz NE.

<u>Analýza</u>

$a^* \dots \quad \psi(a^*) = 1$

v každém kroku pst. $\geq \frac{1}{2}$, že Hammingova vzdálenost mezi a^* a a_i klesne o jedna.
V opačném případě o jedna stoupne.



v nejhorším případě klesne vždy s pstí $= \frac{1}{2}$.

Pokud $d_H(a^*, a_0) = k$, jak dlouho trvá, než

$d_H(a^*, a_i) = 0$?

<u>Odpověď</u>: V průměrném případě nejvýše doba přechodu z k do 0 při procházce na přímce.

$\Rightarrow \mathbb{E}[d_H(a^*, a_0) = k \to d_H(a^*, a_i) = 0] \leq n^2$.

$\Rightarrow$ očekávaná doba zastavení alg. na splnitelné formě $\leq n^2$. (Algoritmus se může zastavit dříve nalezením jiného splňujícího ohodnocení)

$Pr[$ Alg se nezastaví v čase $2n^2] \leq \frac{1}{2}$
$Pr[$ — " — $n^3] \leq \frac{1}{2^{n/2}}$.

$\Rightarrow \psi \notin$ 2-SAT ... vždy správná odpověď
$\quad \psi \in$ 2-SAT ... správná odpověď s pstí $\geq 1 - 2^{-n/2}$

<u>Alternativní procházka na grafu.</u>

chtěl bych uniformní stacionární distribuci.
Jak to zařídit? $\qquad \pi_i = \frac{1}{n}$

potřebuji $\quad \pi_i \, p_{ij} = \pi_j \, p_{ji}$
$\frac{1}{n} p_{ij} = \frac{1}{n} p_{ji}$
$p_{ij} = p_{ji}$

<u>Možnosti</u>: 1) $p_{ij} = \frac{1}{n} \quad \forall i \neq j$
$p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i}' p_{ij} \quad \forall i$

2) $p_{ij} = \min\{\frac{1}{\deg i}, \frac{1}{\deg j}\} \quad \forall i \neq j$
$p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i}' p_{ij} \quad \forall i$

[2) " p_{ij} $\forall i \neq j$]

$p'_{ii} = 1 - \sum_{j\sim i} p'_{ij}$ $\forall i$

3) $p''_{ij} = \frac{p'_{ij}}{1-p'_{ii}}$ $\forall i \neq j$

$p''_{ii} = 0$ $\forall i$

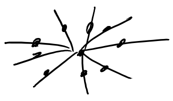
→ zbrklá varianta 2) bez smyček nebude mít $\pi_i = \frac{1}{n}$, ale bude mít stejně dobrou nebo lepší dobu pokrytí grafu.

→ varianta 2) T... doba pokrytí grafu G

- $\mathbb{E}[T] \le O(n^2 \lg n)$

lepší než obyčejná náhodná procházka!

(pro konkrétní graf může být horší:



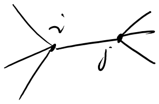
$\Theta(n^2 \lg n)$

obyčejná $O(n \lg n)$))

Dk:

- $\mathbb{E}[T_{ij}] \le \mathbb{E}[T_{ii}] \cdot \max\{\deg i, \deg j\}$ $\le n \cdot \max\{\deg i, \deg j\}$

$i \sim j$

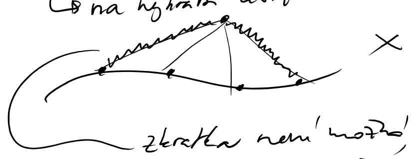


$i \neq j$

$$\mathbb{E}[T_{ij}] \le \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{E}[T_{v_\ell, v_{\ell+1}}] \le \sum_{\ell} n \cdot \max\{\deg v_\ell, \deg v_{\ell+1}\} \le n\, 2 \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} \deg v_\ell}_{\le 3n} \le n \cdot 2 \cdot 3n = 6n^2$$

každý vrchol v_ℓ přispěje nejvýš $2\times \deg v_\ell$

↳ na nejkratší cestě



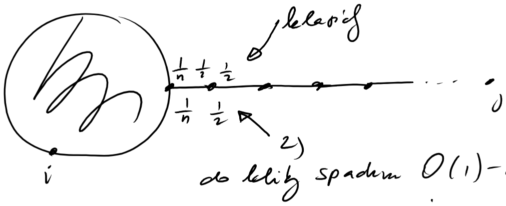
zkratka není možná!

→ každý z n vrcholů přispívá nejvýše do 3 stupňů.

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}[T_{ij}] \le 6n^2$

$\xrightarrow{\text{Matthews}}$ $\mathbb{E}[T] \le 6n^2 \ln n$. ∎

Př:



do kliky spadnu $O(1)$-krát

při cestě $\pi \propto \deg j$.

Obecně chci stacionární distr. π_i:

$$\rightarrow \quad p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\deg i} \min\left(\frac{\pi_j \deg i}{\pi_i \deg j}, 1\right) & i \sim j \\ 0 & i \not\sim j \\ 1 - \sum'_{\ell \sim i} p_{i\ell} & i = j \end{cases}$$

$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$:

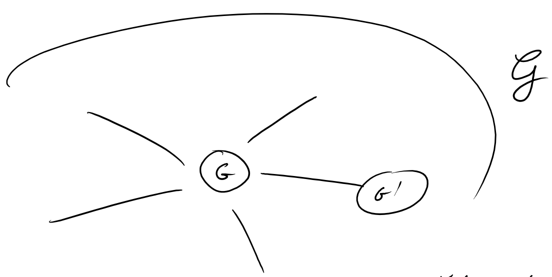
a) $\pi_j \deg i \geq \pi_i \deg j$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \cdot \frac{1}{\deg i}$$

$$\pi_j p_{ji} = \pi_j \frac{\pi_i}{\pi_j \deg i} = \frac{\pi_i}{\deg i} \quad \checkmark$$

b) $\pi_j \deg i < \pi_i \deg j$ symetricky ✓

Př: Generování náhodného souvislého grafu s m hranama.



G je spojeno s G', pokud se liší umístěním jedné hrany.

$\deg G \leq n^2 m$

Zvolím π_G = uniformní

$$p_{G,G'} = \min\left\{\frac{1}{\deg G}, \frac{1}{\deg G'}\right\}.$$

Náhodná procházka na $\mathcal{G}$ konverguje k rovnoměrnému rozdělení grafu.

Otázka: Jak rychle?

Michal v 2020-01-17 08:07

• statistická vzdálenost : p, q pstní rozdělení

$$\frac{1}{2}\|p-q\|_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$$

Pozorování: $\max_{S \subseteq \{1,\dots,n\}} \left|\sum'_{i\in S} p_i - \sum'_{i \in S} q_i\right| =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$$

Dk: $S = \{ i \in \{1, \dots, n\},\ p_i \geq q_i \}$

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| = \sum_{i \in S} |p_i - q_i| + \sum_{i \notin S} |p_i - q_i|$$

$$= \sum_{i \in S} (p_i - q_i) + \sum_{i \notin S} q_i - p_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i}_{\leq \max_S \left| \sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i \right|} + \underbrace{\sum_{i \notin S} q_i - \sum_{i \notin S} p_i}_{\leq \max_S \left| \sum_{i \notin S} q_i - \sum_{i \notin S} p_i \right|} = (*)$$

$$= \max_S \left| \sum_{i \in \bar{S}} q_i - \sum_{i \in \bar{S}} p_i \right|$$

$$(*) \leq 2 \cdot \max_S \left| \sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i \right|$$

- $$\sum_{i \notin S} q_i - \sum_{i \notin S} p_i = \left(1 - \sum_{i \in S} q_i\right) - \left(1 - \sum_{i \in S} p_i\right)$$

$$= \sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i$$

$$\Rightarrow \quad (*) = 2 \left(\sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i \right)$$

$\forall A \subseteq \{1, \dots n\}$ $\quad \left| \sum_{i \in A} p_i - \sum_{i \in A} q_i \right| =$

$$= \left| \underbrace{\sum_{A \cap S} p_i - \sum_{A \cap S} q_i}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{A \cap \bar{S}} p_i - \sum_{A \cap \bar{S}} q_i}_{\leq 0} \right|$$

$$\leq \max \left\{ \underbrace{\left| \sum_{A \cap S} p_i - \sum_{A \cap S} q_i \right|}_{\leq \left(\sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i \right)}, \underbrace{\left| \sum_{A \cap \bar{S}} p_i - \sum_{A \cap \bar{S}} q_i \right|}_{\leq \left| \sum_{i \in \bar{S}} p_i - \sum_{i \in \bar{S}} q_i \right|} \right\}$$

$$\leq \sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i \qquad\qquad = \sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i$$

$$\Rightarrow \max_{A \subseteq \{1, \dots, n\}} \left| \sum_{i \in A} p_i - \sum_{i \in A} q_i \right| = \sum_{i \in S} p_i - \sum_{i \in S} q_i \quad \boxed{}$$

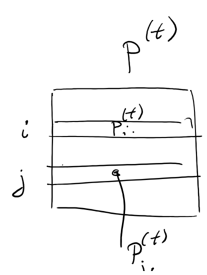
P ... matice přechodu m.p. (aperiodický, souvislý)

π ... stacionární rozdělení

Def: $t \geq 0 \qquad i \in \{1, \dots n\}$

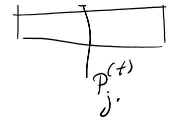
$$V_t(i) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j \in \{1, \dots n\}} \left| P_{ij}^{(t)} - \pi_j \right| = \frac{1}{2} \| P_{i\cdot}^{(t)} - \pi \|_1$$

$$V_t = \max_{i \in \{1, \dots n\}} V_t(i)$$



$$\rho_t(i,j) = \frac{1}{2} \| P_{i\cdot}^{(t)} - P_{j\cdot}^{(t)} \|_1$$

$$D_t = \max \rho_t(i,j)$$



$$\rho_t = \max_{i,j} \rho_t(i,j)$$

Def: <u>mixing time</u> $\tau = \min\{t; V_t \le \frac{1}{2e}\}$

<u>Tvrzení</u>: $t, s \ge 0$

(i) $V_t \le \rho_t \le 2V_t$

(ii) $\rho_{s+t} \le \rho_s \cdot \rho_t$

(iii) V_t is decreasing

<u>Dk</u>: $\forall i,j$

$$\rho_t(i,j) = \frac{1}{2}\cdot\| P^{(t)}_{i\cdot} - P^{(t)}_{j\cdot}\|_1 = \frac{1}{2}\| P^{t}_{i\cdot} - \pi\cdot + \pi\cdot - P^{(t)}_{j\cdot}\|_1$$

$$\le \frac{1}{2}\cdot\|P^{(t)}_{i\cdot} - \pi\|_1 + \frac{1}{2}\|\pi - P^{(t)}_{j\cdot}\|_1$$

$$= V_t(i) + V_t(j) \le 2V_t$$

$$\Rightarrow \rho_t \le 2V_t$$

$$\pi P^{(t)} = \pi \qquad \sum_{j=1}^n \pi_j P^{(t)}_{j\cdot} = \pi \qquad \sum_j \pi_j = 1$$

$$V_t(i) = \frac{1}{2}\| P^{(t)}_{i\cdot} - \sum_{j=1}^n \pi_j P^{(t)}_{j\cdot}\|$$

$$= \frac{1}{2}\|\sum_{j=1}^n \pi_j P^{(t)}_{i\cdot} - \sum_{j=1}^n \pi_j P^{(t)}_{j\cdot}\|$$

$$= \frac{1}{2}\|\sum_{j=1}^n \pi_j (P^{(t)}_{i\cdot} - P^{(t)}_{j})\|$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \|\pi_j (P^{(t)}_{i\cdot} - P^{(t)}_{j\cdot})\|$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \pi_j \underbrace{\| P^{(t)}_{i\cdot} - P^{(t)}_{j\cdot}\|}_{=2\rho_t(i,j)\,\le 2\rho_t}$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_j \pi_j \cdot 2\rho_t = \rho_t$$

✓

(ii) $$\rho_{s+t}(i,j) = \frac{1}{2}\| P^{(t+s)}_{i\cdot} - P^{(t+s)}_{j\cdot}\|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\|\sum_{\ell=1}^n P^{(t)}_{i\ell} P^{(s)}_{\ell\cdot} - \sum_{\ell=1}^n P^{(t)}_{j\ell} P^{(s)}_{\ell\cdot}\| = (**)$$

<u>Fakt</u>: $\forall u_1,\dots u_k, v_1,\dots v_{k'} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_k, \beta_1\dots\beta_{k'} \ge 0$

$\sum \alpha_i = \sum \beta_i = 1$. Pokud $\forall i,j \ \|u_i - v_j\| \le \varepsilon$

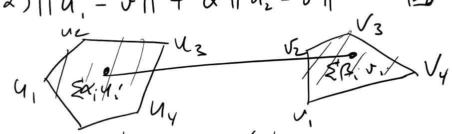
Pak $\|\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i - \sum_{i=1}^{k'} \beta_i v_i\| \le \varepsilon$

<u>Dk</u>: indukcí dle k & k': Idea indukčního kroku:

$$\|(1-\alpha)u_1 + \alpha u_2 - v\| = \|(1-\alpha)u_1 + \alpha(u_2) - (1-\alpha)v - \alpha v\| \le$$

$$\le (1-\alpha)\|u_1 - v\| + \alpha\|u_2 - v\| \quad \boxed{}$$

<u>Obrázek</u>:

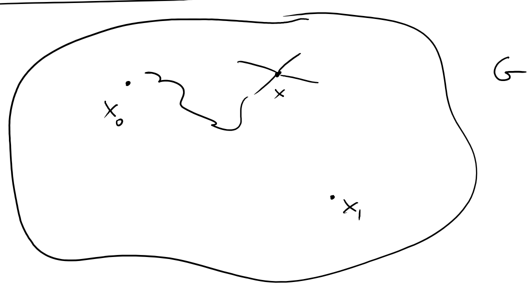


$u_5 \hookrightarrow$ konvexní kombinace

$\boxed{\text{Pokračování o několik stran níže}}$

Elektrické obvody

Pravděpodobnost přechodu:



$$x_0 = x, X_1, X_2 \dots$$

$p_x = Pr[\,x_1$ navštívíme dříve než x_0, když začneme v $x\,]$

$$p_x = \sum_{y\sim x} \frac{1}{\deg x}\, p_y = \frac{1}{\deg x} \sum_{y\sim x} p_y \qquad \forall x \neq x_0, x_1$$

$$p_{x_0} = 0 \qquad p_{x_1} = 1$$

$n = V(G) \Rightarrow n$ rovnic pro n neznámých

- zjevně existuje řešení, existuje jich více?

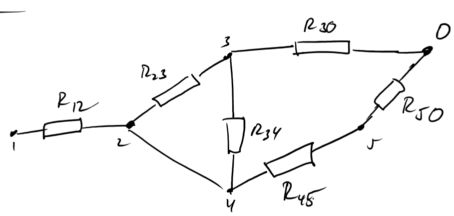
$$p = (p_{x_0}, p_{x_1}, \dots\ p_{x_{n-1}})$$
$$p' = (p'_{x_0}, p'_{x_1}, \dots\ p'_{x_{n-1}})$$

$$d = p - p'$$

d splňuje $\quad d_x = \frac{1}{\deg x} \sum_{y\sim x} d_y \qquad \forall x \neq x_0, x_1$

$$d_{x_0} = 0 \qquad d_{x_1} = 0$$

Tvrzení, že $d \equiv 0$. Nechť x je t.ž. $|d_x|$ je maximální. Pak sousedi d_x mají mít stejnou hodnotu jako d_x, tj. též maximální. Jejich sousedi též, atd. až se dostaneme k x_0, který má však hodnotu nulovou.



$$V_1 = 1 \qquad V = 0$$

Jaký proud teče obvodem?

1) Ohmův zákon $\qquad I_{xy} = \dfrac{V_x - V_y}{R_{xy}}$

2) Kirchhoffův zákon

$$\forall x \neq x_0, x_1 \qquad \sum_{y \sim x}{}' I_{xy} = 0$$

$$1\&2) \Rightarrow \quad \forall x \neq x_0, x_1 \qquad \sum_{y \sim x}{}' \frac{V_x - V_y}{R_{xy}} = 0$$

$R_{xy} \equiv 1$

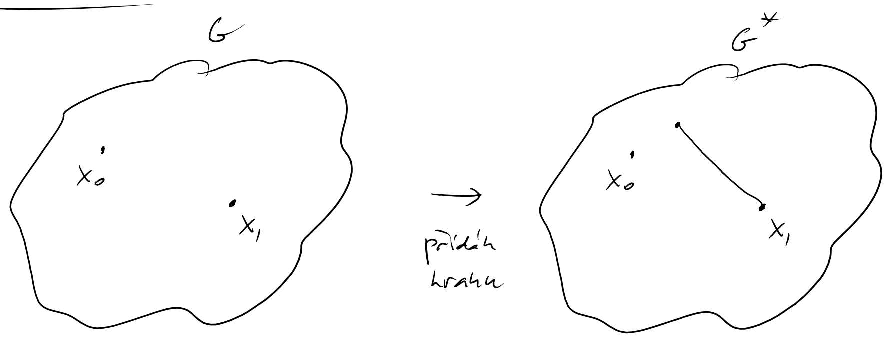
$$\Updownarrow$$

$$V_x = \frac{1}{\deg x} \sum_{y \sim x}{}' V_y \,.$$

$$V_{x_0} = 0 \qquad V_{x_1} = 1$$

$\Rightarrow$ řešení právě jedno $\Rightarrow$ identické s $p_{x_0} \cdots p_{x_{n-1}}$.

$$V_{x_i} = p_{x_i}$$



pravděpodobnost únikem ... $p_A = Pr[$ přijdu do x_1 dříve, než se vrátím do x_0 počínaje v x_0 $]$

$$p_A = \frac{1}{\deg x_0} \sum_{y \sim x_0}{}' p_y \qquad\qquad p_A^* \text{ v } G^* \text{ obdobně}$$

Otázka: $p_A^* > p_A$ nebo $p_A > p_A^*$?

$$p_y = V_y \quad y \sim x \qquad\qquad I_{y x_0} = \frac{V_y - 0}{1} = V_y$$

$$p_A = \frac{1}{\deg x_0} \sum_{y \sim x_0}{}' I_{y x_0}$$

$I \; := \sum{}' I \; \ldots$ el. proud v obvodu

$y \sim x_0 \quad I_{yx_0}$ ... celkový proud v obvodu

$R_{eff}^{x_0,x_1}(G)$ ... efektivní odpor mezi x_0 a x_1 v G

$$I_{tot} = \frac{V_{x_0} - V_{x_1}}{R_{eff}^{x_0,x_1}(G)}$$

$$p_A = \frac{1}{\deg x_0} \cdot \frac{1}{R_{eff}^{x_0 x_1}(G)}$$

<u>Věta</u> [Rayleighův princip monotonicity]
Když snížíme odpor některého rezistoru v el. obvodě, tak efektivní odpor $R_{eff}^{x_0,x_1}(G)$ může jedině klesnout.

- <u>vyzářená energie</u> hrany $x \sim y$ s odporem R_{xy}, přes, kterou teče proud I_{xy}

$$E((x,y)) \stackrel{def}{=} \frac{(V_x - V_y)^2}{R_{xy}} = I_{xy}^2 R_{xy}$$

$$E_{tot} \stackrel{def}{=} \sum_{x \sim y}' E((x,y))$$

<u>Lema</u>: $$E_{tot} = \frac{(V_{x_0} - V_{x_1})^2}{R_{eff}^{x_0 x_1}(G)} = I_{tot}^2 \cdot R_{eff}^{x_0 x_1}(G)$$

<u>Dk</u>: $$E_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} I_{ij}^2 R_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (V_{x_i} - V_{x_j}) I_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} V_{x_i} \sum_{j=0}^{n-1} I_{ij} - \sum_{j=0}^{n-1} V_{x_j} \sum_{i=0}^{n-1} I_{ij} \right) = *$$

$$\forall i > 1 \quad \sum_{j=0}^{n-1} I_{ij} = 0 \qquad V_{x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad * = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot V_{x_1} \sum_{j=0}^{n-1} I_{1j} = (V_{x_1} - V_{x_0}) I_{tot}$$

$$= \frac{(V_{x_1} - V_{x_0})^2}{R_{eff}^{x_0 x_1}(G)} \quad \text{QED}$$

- <u>Jednotkový tok</u> z x_0 do x_1 je fce $J : E(G) \to [0,1]$

t.ž. 1) $\forall\, x \sim y \quad J_{xy} = -J_{yx}$

2) $\forall\, x \neq x_0, x_1 \quad \sum'_{y \sim x} J_{x,y} = 0$

3) $\sum'_{y \sim x_0} J_{x_0,y} = 1$

$\sum'_{y \sim x_1} J_{y x_0} = 1$

- <u>Jednotkový proud z x_0 do x_1</u>, je jednotkový tok I z x_0 do x_1,
  t.ž. $\exists\, V : V(G) \to \mathbb{R}$

  $V_{x_0} = 0$ & $\forall\, x \sim y \quad J_{xy} = \dfrac{V_x - V_y}{R_{xy}}$, kde $R_{xy} \equiv 1$

  (tedy je to jednotkový tok splňující Ohmův zákon)

<u>Věta</u>: $\forall$ jednotkový tok J z x_0 do x_1 a jednotkový proud I z x_0 do x_1, platí $E(J) \geq E(I)$.

<u>Dk</u>: Nechť $V : V(G) \to \mathbb{R}$ je potenciál příslušející I

Vezmeme $D = J - I$

$$\sum'_{x \sim y} J_{xy}^2 \cdot R_{xy} = \sum'_{x \sim y} D_{xy}^2 R_{xy} + 2 I_{xy} D_{xy} R_{xy} + I_{xy}^2 R_{xy}$$

$$= \underbrace{\sum'_{x \sim y} D_{xy}^2 R_{xy}}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\sum'_{x \sim y} I_{xy} D_{xy} R_{xy}}_{\geq 0} + \sum' I_{xy}^2 R_{xy}$$

$\Rightarrow \quad I_{xy} R_{xy} = V_x - V_y \quad$ z def. jednotkového proudu

$$\sum'_{x \sim y} (V_x - V_y) D_{xy} = \sum'_{x \sim y} V_x D_{xy} - \sum'_{x \sim y} V_y D_{xy}$$

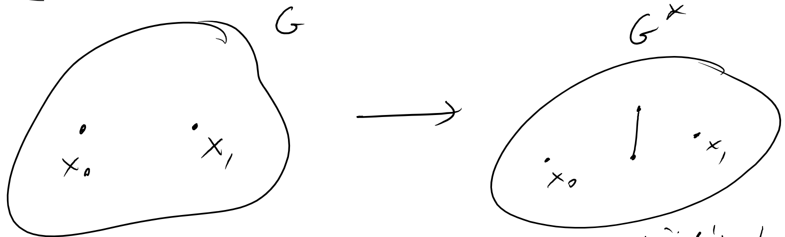
$$= \sum'_{x} V_x \sum'_{y \sim x} D_{xy} - \sum'_{y} V_y \sum'_{x \sim y} D_{xy}$$

$$= \sum_x V_x \underbrace{\sum_{y \sim x} D_{xy}}_{=0} - \sum_y V_y \underbrace{\sum_{x \sim y} D_{xy}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \sum_{y \sim x} D_{xy} = \underbrace{\sum_{y \sim x} J_{xy}}_{=0} - \underbrace{\sum_{y \sim x} I_{xy}}_{=0} \qquad \blacksquare$$

z definice toku

<u>Dk:</u> [Rayleighův princip monotonicity]



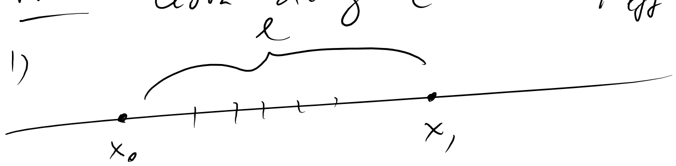
přidám hranu / snížím odpor hrany

jednotkový proud I jednotkový proud I^*

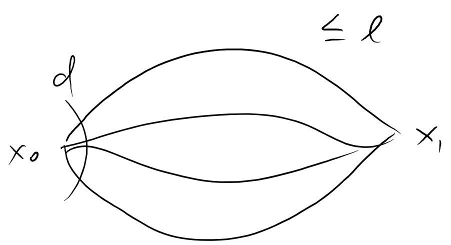
$$R^{eff}_{x_0,x_1}(G) = E_G(I) \geq E_{G^*}(I) \geq E_{G^*}(I^*) = R^{eff}_{x_0,x_1}(G^*) \qquad \blacksquare$$

<u>Př:</u> cesta délky ℓ $\qquad R^{x_0 x_1}_{eff}(G) = \ell$

1)



2)



v G existuje $\geq d$ cest délky $\leq \ell$ mezi x_0 & x_1

$$\Rightarrow R^{eff}_{x_0,x_1} \leq \frac{\ell}{d}$$

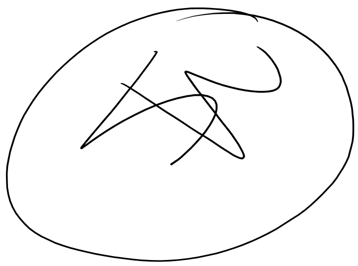
jednotkový tok J pošlu $1/d$ podél každé cesty,

$$E(J) \leq \sum_{\text{cesty}} \frac{1}{d^2} \cdot \ell = \frac{\ell}{d}$$

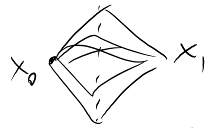
$$\Rightarrow R^{eff}_{x_0,x_1}(G) \leq E(J) = \frac{\ell}{d}.$$

3) klika

K_n



$R^{eff}_{x_0 x_1}(G) \le \frac{2}{n-2}$



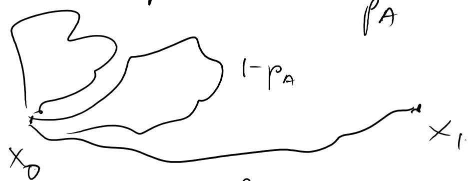
$n-2$ ostatních vrcholů

$\frac{1}{n-1} \le R^{eff}_{x_0,x_1}$ protože jednotkový proud vyzařuje alespoň $\frac{1}{n-1}$ na hranách $x_0 \sim y$.

Připomeňme si: p_A ... pst úniku z x_0 do x_1

$$p_A = \frac{1}{\deg x_0} \cdot \frac{1}{R^{eff}_{x_0,x_1}(G)}$$

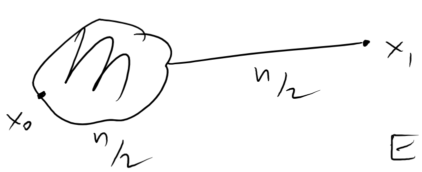
... # návratů do x_0, než půjdu do x_1 je v průměru $\frac{1}{p_A} = \deg x_0 \cdot R^{eff}_{x_0 x_1}(G)$.



Ukážeme: $E[T_{uvu}] = 2\,|E(G)| \cdot R^{eff}_{u,v}(G)$

doba přechodu $u \to v \to u$

Př:



$R^{eff}_{x_0 x_1}(G) \ge \frac{n}{2}$

$$E[T_{x_0 x_1 x_0}] \ge 2 \cdot \frac{n^2}{4} \cdot \frac{n}{2} \ge \frac{n^3}{4}.$$

$$E[T_{x_0 x_1 x_0}] = E[T_{x_0 x_1}] + E[T_{x_1 x_0}]$$

$\Rightarrow$ $E[T_{x_0 x_1}]$ nebo $E[T_{x_1 x_0}] \ge \frac{n^3}{8}$ ∎

Dk: def: $H = E[T \quad] \quad \forall u \neq v$

$\underline{\text{--}}$.

def: $H_{yx_1} = E[T_{yx_1}] \quad \forall y \neq x_1$

$H_{x_1x_1} = 0$

$$H_{yx_1} = \frac{1}{\deg y} \sum_{z \sim y}' H_{zx_1} + 1$$

uvažujme tok na hranách $E(G)$ t.ž.

$$\forall x \neq x_1 \qquad \sum_{y \sim x}' I_{xy} = -\deg x$$

$$\sum_{y \sim x_1}' I_{x_1y} = 2 \cdot E(G) - \deg x_1$$

tedy do každého vrcholu x tlačíme proud x

a odebíráme $2 \cdot E(G)$ z x_1.

pro tento proud existuje napětí $V: V(G) \to \mathbb{R}$.

které ho indukuje a kde $V_{x_1} = 0$

Jelikož $I_{xy} = V_x - V_y$ dostáváme

$$\forall x \neq x_1 \quad \sum_{y \sim x}' V_x - V_y = \deg x$$

$$\Leftrightarrow \quad V_x = \frac{1}{\deg x} \sum' V_y + 1$$

a $V_{x_1} = 0$

$\Rightarrow$ položením $V_y = H_{yx_1}$ získáme

požadovaný tok (proud) obrodem

Podobně můžeme definovat

$H'_{yx_0} = E[T_{yx_0}] \quad$ pro $y \neq x_0$

$H'_{x_0x_0}$

a tok taký, že v každém uzlu x bude

odebírat proud $\deg x$ a do uzlu x_0

odebírat proud $\deg x$ a do uzlu x_0 budu vstřikovat celkově $2 \cdot E(G) - \deg x_0$.

opět, položíme-li $-H'_{y x_0}$ jako napětí V'_y a $V'_{x_0} = 0$, získáme takový proud.

Položme nyní $V'' = V + V'$. Jelikož všechno je lineární, napětí V'' indukuje v obvodu proud, kde do x_0 vstřikuji $2 \cdot E(G)$ a z x_1 odebírám $2E(G)$ a všechny ostatní uzly mají bilanci proudu 0.

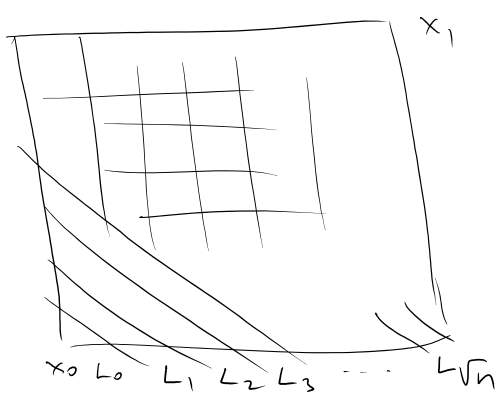
$\rightarrow$ Tedy I_{tot} mezi x_0 a x_1, při V'' je $2 \cdot |E(G)|$.

$$I_{tot} = \frac{V''_{x_0} - V''_{x_1}}{R^{eff}_{x_0,x_1}(G)} = \frac{\underbrace{V_{x_0}}_{= H_{x_0 x_1}} + \underbrace{V'_{x_0}}_{=0} - \underbrace{V_{x_1}}_{=0} - \underbrace{V'_{x_1}}_{= -H_{x_1 x_0}}}{R^{eff}_{x_0 x_1}(G)} =$$

$$= \frac{H_{x_0 x_1} + H_{x_1 x_0}}{R^{eff}_{x_0 x_1}(G)}$$

$$\Rightarrow \quad R^{eff}_{x_0 x_1}(G) \cdot 2 \cdot |E(G)| = E[T_{x_0 x_1}] + E[T_{x_1 x_0}] \quad \blacksquare$$

Př: mřížka $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$



$R^{eff}_{x_0 x_1}(G) = \Theta(\lg n)$

Hrany v $L_0, L_1, \dots L_{\sqrt{n}}$ tvoří disjunktní řezy mezi x_0 a x_1. $L_i = \Theta(i)$

Jednotkový proud I mezi x_0 a x_1 má vyzářenou energii: $E(I) \geq \Theta\left(\sum \frac{1}{i}\right) = \Theta(\lg \sqrt{n}) = \Theta(\lg n)$

Pokud $a_1, a_2, \dots a_{l=\Theta(i)}$ je proud přes hrany L_i, pak $\sum_{i=1}^{l} a_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} a_i^2 \cdot 1 \geq \frac{1}{l}$

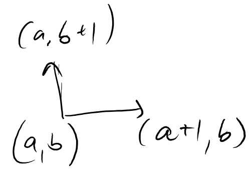
$\Rightarrow R^{eff}_{x_0 x_1}(G) \geq \Omega(\lg n)$.

Dk:

$a_i = \frac{1}{l} + \varepsilon_i$

$$\sum a_i^2 = \sum \left(\frac{1}{l} + \varepsilon_i\right)^2 = \sum \frac{1}{l^2} + 2\frac{1}{l} \underbrace{\sum \varepsilon_i}_{=0} + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{l} + 0 + \text{"}\geq 0\text{"} \geq \frac{1}{l}$$ ■

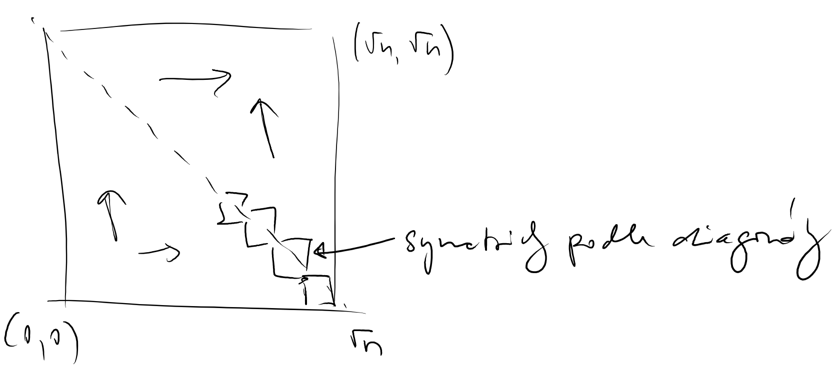
Jednotkový tok J



$J_{(a,b)(a+1,b)} = \frac{a+1}{(a+b+2)} \cdot \frac{1}{(a+b+1)}$

$J_{(a,b)(a,b+1)} = \frac{b+1}{(a+b+2)} \cdot \frac{1}{(a+b+1)}$

tok přes vrchol (a,b) je $\frac{1}{(a+b+1)}$



$\Rightarrow E(J) \geq E(I) = R^{eff}_{x_0 x_1}(G)$

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{(i+1)^2} \le \lg n \quad\Rightarrow\quad R^{eff}_{x_0x_1}(G) \le \lg n$$

$$\Rightarrow\quad E[T_{x_0x_1x_0}] \le 4n\cdot \lg n$$

$$\Rightarrow\quad E[C] \le 4n \lg^2 n \qquad \blacksquare$$

- Pro d-dim mřížku, kde $d>2$, $R^{eff}_{x_0x_1}(G) = \Theta(\frac{1}{d})$.

  bod $(a_1,\dots a_d)$ přenáší proud $\frac{1}{\binom{\sum a_i + d-1}{d-1}}$

  a po hraně do $(a_1,\dots a_i+1,\dots a_d)$

  posílá $\frac{a_i+1}{\sum a_i+d}\cdot\frac{1}{\binom{\sum a_i+d-1}{d-1}}$

Michal Koucky at 26. 5. 2016 10:12

Dynamický graf

$\mathcal{G} = G_1, G_2, \dots$ v čase t máme graf G_t

předpokládáme $V(G_t) = V(G_1)$ $\forall t$

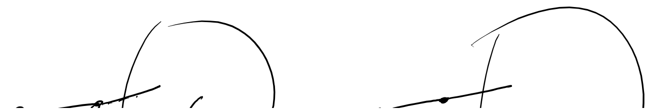
mění se pouze hrany

náhodná procházka:

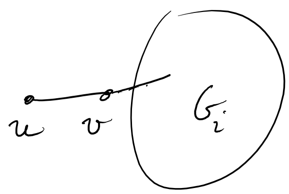
v čase t: jsem ve vrcholu u a udělám krok náhodné procházky na G_t

- $\mathcal{G}$ souvislý $\overset{def}{=}$ $\forall t$ G_t souvislý

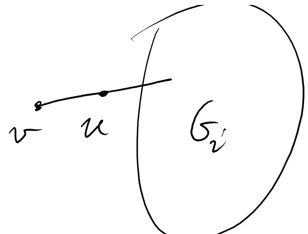
problém: na souvislém grafu $\mathcal{G}$ může náhodná procházka alternovat mezi dvěma vrcholy



vrchol



pro v sudé



pro v liché

procházka z $\underline{u}$ v sudém čase alternuje mezi u & v.

- G je prozkoumatelný $\overset{def}{=}$ G je souvislý a v každém čase je v každém vrcholu smyčka ○

<u>Tvrzení</u>: Pokud je G prozkoumatelný, pak je jeho očekávaná doba pokrytí nejvýše $n^{O(n)}$.

<u>Dk</u>: zvol $u, v \in G$. Ukážeme, že existuje cesta z u do v v G.

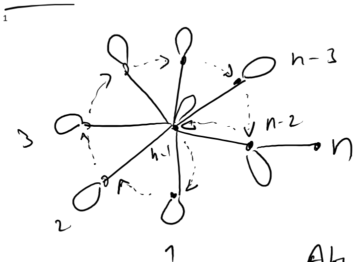
$V_t = \{ w \in V(G);$ v čase t můžeme být v w při procházce z $u \}$

$V_t \neq V(G_t) \Rightarrow V_t \subsetneq V_{t+1}$: $V_t \subseteq V_{t+1}$ díky smyčkám
$V_t \neq V_{t+1}$ protože G_t je souvislý, existuje $w \in V(G_t) \setminus V_t$ spojený hranou s V_t.

$\Rightarrow$ $\exists$ cesta z u do v délky nejvýše $\underline{n}$.
Tato cesta je vybrána s pstí $\geq \left(\frac{1}{n}\right)^n$.

$\rightarrow$ $E[T_{uv}] \leq n^n \underset{\text{Matthews}}{\Longrightarrow} E[C] \leq n^{O(n)}$ $\boxed{\text{B}}$

<u>Př</u>:



vrchol 1..n se točí podle naznačených šipek "...>".

Aby se procházka z 1 dostala do n, musí

n-3 kroků použít smyčku a poté udělat krok do n → pst. 2^{-n-2}, že se to stalo v daných n-2 krocích stane
$\Rightarrow E[T_{1,n}] \geq 2^{-\Omega(n)}$.

- podobný příklad existuje i s grafy se stupněm vrcholů ≤ 4.
- problém je způsoben různými stupni vrcholů → měnící se stacionární distr.

Věta: Pro d-regulární prozkoumatelný g platí:
$$E(C) = O(d\, n^3 \lg^2 n)$$

Lema: A symetrická matice, stochastická, souvislá.
Nechť $\delta > 0$ je takové, že $\min_{\substack{i,j \\ A_{ij} \neq 0}} A_{ij} \geq \delta$.
Pokud $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla A pak

1) $\lambda_1 = 1$; $\forall i \geq 2, \lambda_i \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$
2) Pokud $\forall i$ $A_{ii} \geq \gamma$, pak $\forall i$ $\lambda_i \geq -(1-2\gamma)$
3) Pokud $\forall i$ $A_{ii} > 0$, pak $\forall i$ $\lambda_i^2 \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$

Dk: A je reálná & symetrická → reálná vlastní čísla & vektory

1) A stochastická $\Rightarrow \lambda_1 = 1$ & $e_1 = \mathbb{1}$
Uvažme vlastní vektor $x \perp \mathbb{1}$ s vlastním číslem λ.
WLOG $\sum_i x^2 = 1$. ↳ $\sum_i x_i = 0$
Nechť t je t.ž. $|x_t| = \max_i |x_i|$ WLOG $x_t > 0$.
zjevně $x_t \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$
Nechť s je t.ž. $x_s = \min_i x_i$ $x_i < 0$.

$\exists\ l_1, l_2, \dots l_k \in \{1, .., n\}$ $k \leq n$
$l_1 = s$ $l_k = t$ & $A_{l_i, l_{i+1}} \neq 0$ $\forall i = 1, .., k-1$
↖ A je souvislá

$\Leftarrow$ A je souvislá

Uvažme $\quad x(\mathbb{I} - A)x^T \qquad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$1-\lambda = x(\mathbb{I}-A)x^T = -2\sum_{i<j} A_{ij}x_ix_j + \sum_i \Big[1-\big(1-\sum_{j\neq i} A_{ij}\big)\Big] x_i^2$$

$$= -2\sum_{i<j} A_{ij}x_ix_j + \sum_{i<j} A_{ij}(x_i^2+x_j^2)$$

$$= \sum_{i<j} A_{ij}(x_i-x_j)^2$$

$$\geq \delta \sum_{i=1}^{k-1} (x_{\ell_i} - x_{\ell_{i+1}})^2$$

$$\text{Cauchy-Schwarz} \geq \frac{\delta}{k-1}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} x_{\ell_i} - x_{\ell_{i+1}}\Big)^2$$

$$= \frac{\delta}{k-1}(x_s - x_t)^2 \geq \frac{\delta}{n^2}$$

2) znovu $x_t = \max_i |x_i| > 0$

příspěvek diagonály

$y = xA \qquad \lambda x_t = y_t \geq \delta x_t - (1-\delta)x_t$

$$\geq -(1-2\delta)x_t$$

$$\Rightarrow \lambda \geq -(1-2\delta)$$

3) $\quad$ 1) & 2) $\Rightarrow$ 3) $\qquad \boxtimes$

<u>Lemma</u>: G je neorientovaný d-regulární graf na n vrcholech, $p = (p_1 \dots p_n)$ je pstní rozdělení na jeho vrcholech. Pak: A_G je matice přechodu n.p. na G.

1) $$\|pA_G - \frac{\mathbb{1}}{n}\|_2^2 \leq \|p - \frac{\mathbb{1}}{n}\|_2^2$$

2) pokud A_G je souvislý, na diagonále nejsou nuly, a všechny nenulové položky jsou $\geq \delta$ pak

$$\|pA_G - \frac{\mathbb{1}}{n}\|_2^2 \leq \Big(1-\frac{\delta}{n^2}\Big)\|p - \frac{\mathbb{1}}{n}\|_2^2$$

Dk: 2) $\alpha_1, \dots \alpha_n$ vlastní vektory A_G (ortonormální báze) pro vlastní čísla
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$. A_G symetrická & stoch.

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ & $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\left\| pA_G - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\|_2^2 = \left\| pA_G - \frac{\mathbb{1}}{n} A_G \right\|_2^2$$
$$= \left\| \left(p - \frac{\mathbb{1}}{n}\right) A_G \right\|_2^2$$

jelikož $\left(p - \frac{\mathbb{1}}{n}\right) \perp \mathbb{1}$ $\quad \exists \beta_2, \dots \beta_n$

$$p - \frac{\mathbb{1}}{n} = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \alpha_i$$

$$\left\| p - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\|_2^2 = \left\langle p - \frac{\mathbb{1}}{n}, p - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\rangle$$
$$= \left\langle \sum_{i \geq 2} \beta_i \alpha_i, \sum_{i=2} \beta_i \alpha_i \right\rangle = \sum_{i=2}^{n} \beta_i^2$$

$$\left\| \left(p - \frac{\mathbb{1}}{n}\right) A_G \right\|_2^2 = \left\| \sum_{i=2}^{n} \beta_i \alpha_i A_G \right\|_2^2 = \left\| \sum \lambda_i \beta_i \alpha_i \right\|_2^2$$
$$= \sum \lambda_i^2 \beta_i^2$$

podle předchozího lemmatu $\lambda_2^2, \dots \lambda_n^2 \leq \left(1 - \frac{\delta}{n^2}\right)$

Tedy: $\left\| \left(p - \frac{\mathbb{1}}{n}\right) A_G \right\|^2 \leq \left(1 - \frac{\delta}{n^2}\right) \sum \beta_i^2$
$$= \left(1 - \frac{\delta}{n^2}\right) \left\| p - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\|_2^2$$

2) stejný důkaz, pouze na konci použijeme $\lambda_1^2, \dots \lambda_n^2 \leq 1$.

$$\Rightarrow \left\| p^{(t)} - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\| \leq \left(1 - \frac{1}{dn^2}\right)^t \left\| p^{(0)} - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\|_2^2$$

$\Rightarrow$ po dn^2 krocích jsme téměř uniformní

$\Rightarrow$ coupon collector

Michal v 2020-01-17 15:01

Pokračování z yöl

Pokračování z výše 

Pokud $\varepsilon_\ell = P_{i\ell} - P_{j\ell}$ $\qquad A = \{\ell \in \{1,\dots,n\}, \varepsilon_\ell \geq 0\}$

$$\sum_\ell \varepsilon_\ell = 1 - 1 = 0 \implies \sum_{\ell \in A}' \varepsilon_\ell = - \sum_{\ell \notin A}' \varepsilon_\ell = \rho_t(i,j)$$

$$c \stackrel{def}{=} \sum_{\ell \in A}' \varepsilon_\ell \qquad \alpha_\ell \stackrel{def}{=} \begin{cases} \varepsilon_\ell / c & \ell \in A \\ 0 & \ell \notin A \end{cases} \qquad \beta_\ell \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & \ell \in A \\ -\varepsilon_\ell / c & \ell \notin A \end{cases}$$

$$(**) = \frac{1}{2} \left\| \sum_\ell \varepsilon_\ell P^{(s)}_{\ell\cdot} \right\| = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left\| \sum_\ell \alpha_\ell P^{(s)}_{\ell\cdot} - \sum_\ell \beta_\ell P^{(s)}_{\ell\cdot} \right\|$$

$$\leq c \cdot \max_{\ell,\ell'} \| P^{(s)}_{\ell\cdot} - P^{(s)}_{\ell'\cdot} \| \cdot \frac{1}{2}$$

$c = \rho_t(i,j)$

$$\leq \rho_t \cdot \rho_s \qquad \square$$

fakt výše

- Ukážeme, jak lze odhadnout ρ_t s pomocí párování.

Uvažme dvě kopie m.p. $X_0, X_1, \dots$ a $Y_0, Y_1, \dots$ kde $X_0 = i$ a $Y_0 = j$. Dovolíme libovolnou závislost mezi $X_0, X_1, \dots$ a $Y_0, Y_1, \dots$, avšak každý z nich sám o sobě je m.p. Jakmile se ve stejnou chvíli dostanou do stejného stavu, spárují se a zůstanou spárovaní.

Nechť $T^{couple}_{i,j}$ je čas, kdy spárování nastane, když začínají ze stavů i & j.

Tvrzení: Pokud m.p. je ergodický, pak

$$\rho_t \leq \max_{i,j} \Pr[T^{couple}_{i,j} > t].$$

Dále pak mixing time $\tau \leq 2e \max_{i,j} \mathbb{E}[T^{couple}_{i,j}]$.

Dk: z definice

$$\rho_t(i,j) = \max_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} \Big| \underbrace{\Pr[X_t \in A \mid X_0 = i]}_{= \sum_{\ell \in A}' P^{(t)}_{i\ell}} - \underbrace{\Pr[Y_t \in A \mid Y_0 = j]}_{= \sum_{\ell \in A}' P^{(t)}_{j\ell}} \Big|$$

$A \subseteq \{1,\dots,n\}$

$$\sum_{l \in A} P_{il}^{(t)} \qquad \sum_{l \in A} P_{jl}^{(t)}$$

$$= \max_A \Big| \Pr[X_t \in A \ \&\ T_{ij}^{coupl} < t \mid X_0 = i] + \Pr[X_t \in A \ \&\ T_{ij}^{coupl} \geq t \mid X_0 = i]$$
$$- \Pr[Y_t \in A \ \&\ T_{ij}^{coupl} < t \mid Y_0 = j] - \Pr[Y_t \in A \ \&\ T_{ij}^{coupl} \geq t \mid Y_0 = j] \Big|$$

$$0 \leq \Pr[X_t \in A \ \&\ T_{ij}^{coupl} \geq t \mid X_0 = i] \leq \Pr[T_{ij}^{coupl} \geq t \mid X_0 = i]$$
$$0 \leq \Pr[Y_t \ \text{---}\!\shortparallel\!\text{---} \mid Y_0 = j] \leq \Pr[\ \dots \mid Y_0 = j]$$
$$\leq \Pr[T_{ij}^{coupl} \geq t \mid X_0 = i \ \&\ Y_0 = j]. \quad \checkmark$$

$$\Pr[T_{ij}^{coupl} \geq 2e\, \mathbb{E}[T_{ij}^{coupl}]] \leq \frac{1}{2e}$$

Markovova nerovnost

$$\vee\!/ \quad \rho_t \quad \vee\!/ \quad V_t$$

Př: Náhodná procházka na hyperkrychli $\{0,1\}^d$

$n = 2^d \qquad i, j \in \{0,1\}^d \qquad i \sim j$ off i se liší od j v ≤ 1 bitě.

ukážeme, že $\tau \leq O(d \lg d)$

Zafixujme $i, j \in \{0,1\}^d$, definujme $X_0 = i, X_1, \dots, Y_0 = j, Y_1 \dots$ následujícím způsobem:

1) vyber náhodný přechod z X_t do X_{t+1}
2) pokud byl změněn bit $X_t \to X_{t+1}$, kde se X_t a Y_t shodují, pak v Y_t změníme ten samý bit $\to Y_{t+1}$. ("na smyčce se neshodují!")
Jinak vybereme náhodný bit, kde se X_t a Y_t liší, nebo smyčku a tento bit ... $\to Y_t$

a Y_t liší, nebo-skrycku u ...
změníme $\to Y_t$.

Zřejmě: 1) $X_0 = i, X_1, \dots$ je náhodná procházka na hyperkrychli $\{0,1\}^d$

2) $Y_0 = j, Y_1, Y_2, \dots$ —//—

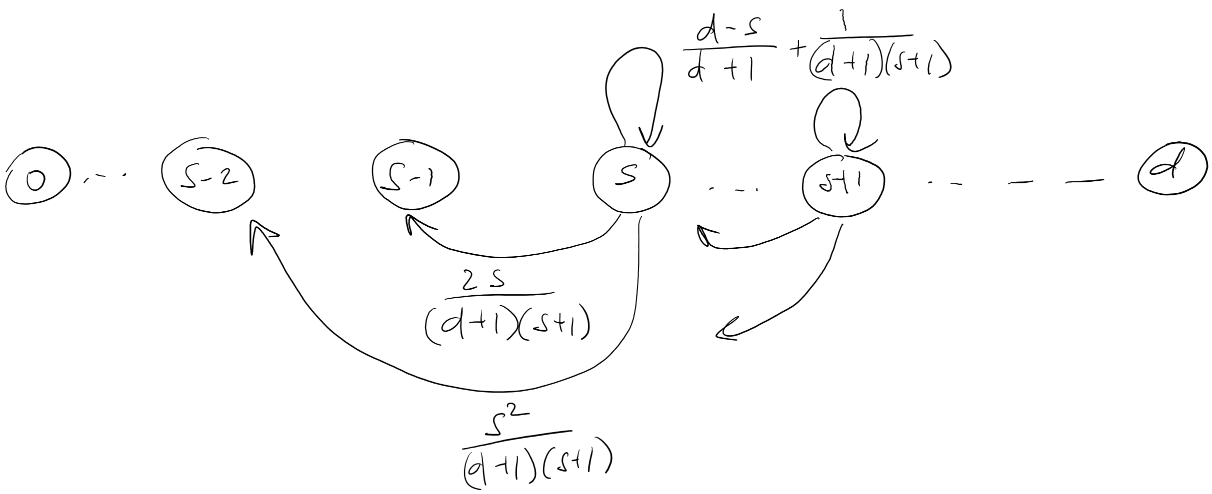
3) Pokud X_t a Y_t se liší v s bitech

pak $\Pr[X_{t+1}$ a Y_{t+1} se liší v s bitech$] = \frac{d-s}{d+1} + \frac{1}{(d+1)(s+1)}$

$\Pr[X_{t+1}$ a Y_{t+1} se liší v s-1 bitech$]$

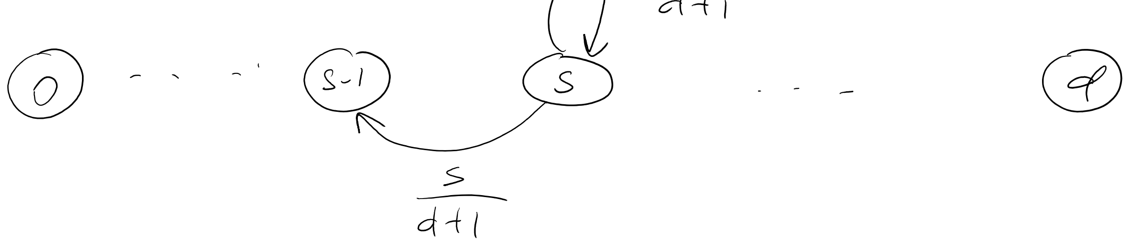
$$= \frac{1}{d+1}\cdot\frac{s}{s+1} + \frac{s}{d+1}\cdot\frac{1}{s+1}$$
$$= \frac{2s}{d+1}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$\Pr[X_{t+1}$ & Y_{t+1} se liší v s-2 bitech$] = \frac{s}{d+1}\cdot\frac{s}{s+1}$



zajímá nás jak dlouho trvá, než se tento m.p dostane do stavu "0" ≈ X_t a Y_t se spárují!

uvažme "pomalejší" m.p.



toto je "de facto" m.p. sběratele kupónů, tudíž z libovolného stavu se dostanu do 0 v očekávaném čase nejvýše $\sum_{s=1}^{d} \frac{d+1}{s} = d+1 \cdot H_d = O((d+1)\lg d)$.

$\Rightarrow$ X_t a Y_t se spárují v očekávaném čase nejvýše $O(d \lg d)$.

$\Rightarrow$ náhodná procházka na hyperkrychli $\{0,1\}^d$ má mixing time $O(d \lg d)$.

Propp-Wilsonův algoritmus

- dovoluje vybrat prvek náhodně s pstí <u>přesně</u> podle stacionární distribuce.

Vyberme časy $N_0, N_1, N_2, \dots$ (nekladné)

t.ž. $N_0 = 0 > N_1 > N_2 > \dots$

Mějme pravidlo přechodu m.p. mezi stavy z S

$$\varphi : S \times \underbrace{[0,1]}_{\text{náhodné číslo}} \to S.$$

(Např. $\varphi(s,r) = s'$ pokud $\sum_{s''<s'} p_{s,s''} < r \le \sum_{s'' \le s'} p_{s,s''}$.)

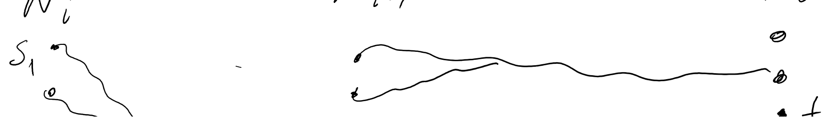
Alg: Vyber náhodnou nekonečnou posloupnost $\dots U_{-2}, U_{-1}, U_0$

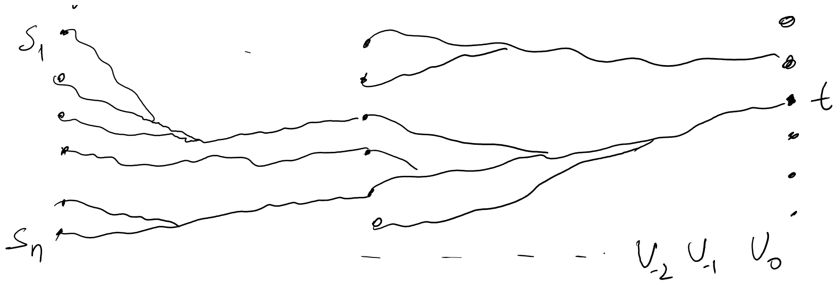
Najdi nejmenší $i \geq 0$, t.ž.

$\forall s, s' \in S\ \exists t \in S$, s & s' se spárují do t:

$$\varphi(\dots\varphi(\varphi(s, U_{N_i}), U_{N_i+1}), U_{N_i+2}), \dots, U_0) =$$

$$= \varphi(\dots\varphi(\varphi(s', U_{N_i}), U_{N_i+1}), U_{N_i+2}), \dots, U_0) = t$$





<u>výstup t.</u>

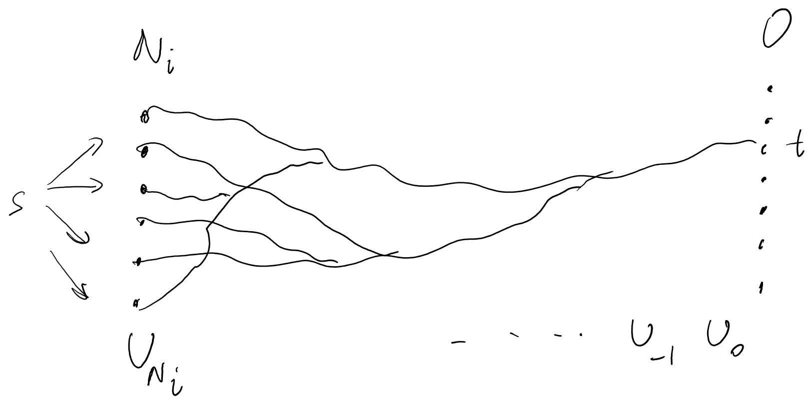
<u>Tvrzení</u>: t je rozděleno dle stacionární distr. π původního m.p.

(pokud párování nastává s pstí 1 přes výběr $U_0, U_{-1}, \dots$)

<u>Dk</u>: nechť π' je výstupní rozdělení t. Pro $\forall \varepsilon > 0$ ukážeme, že $\|\pi' - \pi\| \le \varepsilon$. Z toho plyne, že $\pi' = \pi$.

Zvolme i, t.ž. $\Pr_{U_0, U_{-1}, \dots}[$všechny stavy se spárují během kroků $N_i, N_i+1, \dots 1] \ge 1-\varepsilon$.

Takové i existuje, neboť pst. spárování všech je 1.



nechť $t' = \varphi(\varphi \cdots \varphi(s, U_{N_i}), U_{N_i+1}, \dots U_0)$.

- Pokud s vybereme dle π, t' je distribuováno podle π (π je stacionární, takže to platí po každém kroku.)
- Pokud s zafixujeme např. na s_1, dostaneme nějakou distribuci t', označme ji π^1.

podobně $\pi^2, \pi^3, \dots \pi^n$.

zřejmě: $\pi = \sum^{n} \pi_i \pi^i$

podobně $\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^n$.

zřejmě: $\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \pi^i$.

Kdykoliv se všechny stavy spárují během $N_i \dots 0$, pak ať začnu z libovolného stavu s, dojdu do stejného t'. Podmíním-li tedy spárováním,

$$\pi^1|\text{spárování} = \pi^2|\text{spárování} = \dots = \pi^n|\text{spárování}.$$

$$\| \pi^i - \pi^i|\text{spárování} \| \le 2 \cdot \varepsilon$$ neboť pst. každého stavu se podmíněním změní nejvýše $(1 \pm \varepsilon)$-krát.

$$\Rightarrow \| \pi - \pi^1|\text{spárování} \| \le 2\varepsilon$$

výsledná distribuce π' je identická s π^1, kdykoliv dojde ke spárování během $N_i \dots 0$, tedy

$$\| \pi' - \pi^1|\text{spárování} \| \le 2\varepsilon$$

pst. $\ge 1 - \varepsilon$

$$\Rightarrow \| \pi - \pi' \| \le 4\varepsilon.$$ ∎

Poznámky:
- φ si můžeme zvolit libovolně, aby vedlo k co nejrychlejšímu spárování.
- čas spárování i lze hledat zprava doleva tak, že si pamatuji které stavy jdou do kterých stavů v prozkoumané části.