

## 3. domácí úlohy

do 11. ledna 2016

**Úloha 1.** Nejprve připomeňme *RL* algoritmus pro testování *USTCONN*, to jest testování dosažitelnosti  $t$  z  $s$  v neorientovaném grafu  $G$ : algoritmus vyjde z vrcholu  $s$  a náhodně prochází vstupní graf po  $10n^3$  kroků; pokud narazí na vrchol  $t$ , vstup přijme, jinak vstup odmítne. Tento algoritmus dá správný výsledek s pravděpodobností alespoň  $1/2$ . Jestliže si v každém vrcholu očísloujeme hrany, které z vrcholu vychází, můžeme procházku grafem popsat posloupností takovýchto čísel. Takové posloupnosti se říká *traverzální posloupnost*. Posloupnost  $w \in \{1, \dots, d\}^*$  je *univerzální traverzální posloupnost pro  $d$ -regulární grafy velikosti  $n$* , pokud pro každý  $d$ -regulární graf na  $n$  vrcholech a každý výchozí vrchol tohoto grafu procházka grafem podle  $w$  navštíví všechny vrcholy daného grafu.

- Ukažte, že existuje univerzální traverzální posloupnost pro  $d$ -regulární grafy na  $n$  vrcholech.
- Ukažte, že existuje univerzální traverzální posloupnost pro  $d$ -regulární grafy na  $n$  vrcholech délky nejvýše  $20dn^4 \log n$ . (*Hint*: Použijte pravděpodobnostní metodu.)

**Úloha 2.** Zkonstruujte univerzální traverzální posloupnost pro  $d$ -regulární grafy na  $n$  vrcholech délky nejvýše  $n^{O(\log n)}$ . (*Hint*: Použijte Nisanův pseudonáhodný generátor.)

**Úloha 3.** Z přednášky známe interaktivní protokol pro neizomorfismus grafů, který pro svoji funkčnost vyžaduje, aby dokazovatel neznal náhodné bity ověřovatele. V tomto cvičení sestrojíme protokol pro neizomorfismus grafů, který dovoluje ověřovateli náhodné bity dokazovateli sdělit, aniž by mu tím pomohl ho podvést.

- Pro grafy  $G_1$  a  $G_2$ , označme jako  $S = \{(H, \pi); H \simeq G_1 \text{ nebo } H \simeq G_2 \text{ a permutace } \pi \text{ na vrcholech } H \text{ splňuje } \pi(H) = H\}$ . Jaká je velikost  $S$  pokud jsou  $G_1$  a  $G_2$  izomorfní a jaká je její velikost pokud izomorfní nejsou.
- Sestrojte protokol pro neizomorfismus grafů, ve kterém jediná komunikace od ověřovatele k dokazovateli jsou náhodně vybrané bity.

**Úloha 4.** Vezměme si interaktivní protokol, ve kterém bude ověřovatel deterministický. Ukažte, že jazyky rozpoznávané s využitím takovýchto dokazovatelů budou patřit do NP.