

2. domácí úlohy - Kódování

do 27. listopadu 2013

Úloha 1. Uvažujme bezprefixový kód s délkou slov $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ takový, že

$$\sum_{i=1}^k 2^{-\ell_i} < 1.$$

Ukažte, že existují libovolně dlouhé řetězky z $\{0, 1\}^*$, které nelze rozdělit na kódová slova.

Úloha 2. *20 otázek.* Uvažujme n objektů. Každý z nich může být nezávisle dobrý, nebo špatný, pravděpodobnost toho, že i -tý je dobrý, je p_i , kde $p_1 > p_2 > \dots > p_n > 1/2$. Úkolem je zjistit, které objekty jsou dobré a které špatné. Můžete na to použít libovolnou otázku s odpovědí ANO/NE.

- Určete dobrou dolní mez na očekávaný počet otázek v libovolném schématu.
- Pokud v konkrétním případě dojde až na nejposlednější otázku v nejdelší posloupnosti otázek a odpovědí, co by taková otázka měla být a jaké dvě množiny bude tato otázka oddělovat? (Slovy) Toto vše za předpokladu dobrého schématu dosahujícího minima otázek v očekávaném případě.
- Určete horní odhad na nejmenší možný očekávaný počet otázek v libovolném schématu (plus-minus jedna).

Úloha 3. *Bezsuffixový kód.* Uvažujme kód, který je bezsuffixový, tedy žádné kódové slovo není sufixem jiného. Ukažte, že takový kód je jednoznačně dekódovatelný a určete minimální možnou očekávanou délku takového kódu pro danou pravděpodobnostní distribuci.

Úloha 4. Pro každý z následujících kódů určete, zda je jednoznačně dekódovatelný. Pokud ano, nalezněte nekonečnou posloupnost, existuje-li, kterou lze dekódovat dvěma způsoby. Ukažte, že taková posloupnost neexistuje pro bezprefixové kódy.

- $C_1 = \{0, 10, 11\}$
- $C_2 = \{0, 01, 11\}$
- $C_3 = \{0, 01, 10\}$
- $C_4 = \{0, 01\}$
- $C_5 = \{00, 01, 10, 11\}$
- $C_6 = \{110, 11, 10\}$
- $C_7 = \{110, 11, 100, 00, 10\}$

Úloha 5. *Náhodná kostka.* Uvažujme nezávislé náhodné proměnné $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ rovnoměrně rozdělené na množině $\{\frac{i}{n}, 1 \leq i \leq n\}$ (nebo $[0, 1]$ chcete-li). Nechť $V = \prod_{i=1}^n X_i$. Jaká je limita $E[V^{1/n}]$ a jaká $(E[V])^{1/n}$ pro n jdoucí do nekonečna?