

1. domácí úlohy - Entropie a vzájemná informace

do 30. října 2013

Úloha 1.

- a) Pro která pravděpodobnostní rozdělení p_1, p_2, \dots, p_n platí, že $H(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$?
- b) Jaký je vztah mezi entropií pravděpodobnostního rozdělení p_1, p_2, \dots, p_n a p'_1, p'_2, \dots, p'_n , kde pro nějaké i a j , $p'_i = p'_j = \frac{p_i + p_j}{2}$ a pro všechna k různá od i a j , $p'_k = p_k$. Jak to lze zobecnit?
- c) Ukažte, že pokud pro náhodné proměnné X a Y je $H(Y|X) = 0$, pak Y je funkcí X .

Úloha 2. Mějme náhodné proměnné X, Y, Z , které mohou být závislé, a funkci $g(\cdot)$. Ukažte, že

- a) $H(X) \geq H(g(X))$
- b) $H(X, Y|Z) \geq H(X|Z)$
- c) $I(X, Y : Z) \geq I(X : Z)$
- d) $I(X : Y|Z) \geq I(X : Z|Y) - I(X : Z) + I(X : Y)$
- a určete, kdy nastává rovnost.

Úloha 3. Nalezněte (závislé) náhodné proměnné X, Y, Z takové, že

- a) $I(X : Y|Z) > I(X : Y)$
- b) $I(X : Y|Z) < I(X : Y)$

Úloha 4. Navrhněte (spočetnou) pravděpodobnostní distribuci, pro kterou $H(X) = \infty$, a dokažte to. (*Hint:* Pro některá $a > 0$, $\sum \frac{1}{n \log^a n}$ konverguje.)