

4. domácí úlohy - Náhodné procházky na grafech

do zkoušky

Úloha 1. Uvažujme graf sestávající z d cest délky $\ell + 1$, všechny spojeny na jednom konci v hvězdu.

- Pro náhodnou procházku začínající v prostředku hvězdy, jaká je očekávaná doba dosažení vrcholu ve vzdálenosti k , $1 \leq k \leq \ell$.
- Pro náhodnou procházku začínající v prostředku hvězdy, jaká je pravděpodobnost, že během návratu do středu je nevdálenější navštívený vrchol ve vzdálenosti přesně k , $1 \leq k \leq \ell$.
- Pro náhodnou procházku začínající v prostředku hvězdy, jaký je očekávaný počet navštívených vrcholů předtím, než navštívíme vrchol ve vzdálenosti přesně k , $1 \leq k \leq \ell$. Předpokládejme, že d je mnohem větší než ℓ .

Úloha 2. Uvažujme úplný binární strom hloubky d s kořenem r , ke kterému přidáme speciální vrchol s spojený se všemi listy. Určete $\mathbf{R}_{r,s}^{eff}$ v tomto grafu.

Úloha 3. *Hyperkrychle* dimenze d je graf s $n = 2^d$ vrcholy označenými jednoznačně prvky z množiny $\{0, 1\}^d$, kde vrchol u je spojen s vrcholem v právě tehdy, když označení u a v se liší právě v jedné složce (má hammingovskou vzdálenost 1).

- Ukažte, že pro každé dva vrcholy u, v je $\mathbf{R}_{u,v}^{eff} \in \Theta\left(\frac{1}{\log n}\right)$.
- Ukažte, jaký je očekávaný čas pokrytí hyperkrychle.