TIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2008/2009**

3. domácí úlohy - Expandery

do 9. ledna 2009

Úloha 1. Ukažte, že pro všechna $1 \leq k \leq n/2$

$$\frac{2^{H(k/n)n}}{n+1} \leq \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq 2^{H(k/n)n}$$

kde pro $0 < x < 1$ je $H(x) = -x \log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$. *Hint:* Použijte binomickou větu na $\left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right)^n$.

Úloha 2. Nechť G je neorientovaný d-regularní graf a nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla jeho incidenční matice. Ukažte, že:

a) $\lambda_1 = d$.

b) $\lambda_1 = \lambda_2$ tehdy a jen tehdy, když G je souvislý.

c) $\lambda_1 = -\lambda_n$ tehdy a jen tehdy, když G je bipartitní.
Hint: Zkoumejte jednotlivé složky příslušných vlastních vektorů.

Úloha 3. Nechť G je hyper-krychle s 2^n vrcholy, to jest graf s vrcholy označenými $\{0,1\}^n$ a hranami mezi vrcholy, pokud se jejich označení liší v právě jedné složce.

a) Ukažte, že vektory $v_x = (v_{x,y})$, kde $x, y \in \{0,1\}^n$ a $v_{x,y} = (-1)^{\sum x_i \cdot y_i}$, jsou vlastní vektory matice sousednosti G. Nalezněte $\lambda_2(G)$.

b) Ukažte, že $h(G) \geq 1$. *Hint:* Pro každý pár vrcholů x, y zvolte pevnou cestu $\gamma_{x,y}$ mezi nimi tak, aby přes každou hranu šlo nejvýše 2^{n-1} těchto cest. Z toho odvoďte, že z každé ne příliš velké množina S musí vycházet mnoho hran.

c) S užitím faktu $\binom{n}{n/2} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} 2^n$ nalezněte horní odhad pro $h(G)$.

Úloha 4. Dokažte Cauchy-Schwarzovu nerovnost platnou pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Hint: Podívejte se na $n = 2$.