

4. domácí úlohy - Komunikační složitost

do 24. května 2022

Úloha 1. Funkce $GT(x, y) : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ nabývá hodnoty jedna právě tehdy, když x je lexikograficky větší než y .

- Ukažte, že deterministická komunikační složitost $D(GT) \leq n + 1$.
- Ukažte, že deterministická komunikační složitost $D(GT) \in \Omega(n)$.
- Ukažte, že pravděpodobnostní komunikační složitost $R_{1/4}(GT) \in O(\log^2 n)$.
- Ukažte, že pravděpodobnostní komunikační složitost $R_{1/4}(GT) \in O(\log n)$.

Úloha 2. Funkce $NEQ_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) : \{0, 1\}^{n \times m} \times \{0, 1\}^{n \times m} \rightarrow \{0, 1\}$ je jedna právě tehdy, když pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$, $x_i \neq y_i$. Navrhněte pravděpodobnostní protokol se soukromými náhodnými bity pro funkci NEQ_m s chybou nejvýše $1/4$, který používá $O(m + \log n)$ bitů komunikace. (Alenka dostává vstup x_1, \dots, x_m , Bob y_1, \dots, y_m .)

Úloha 3. Nechť $MED(x, y) : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{1, \dots, n\}$ udává medián množin reprezentovaných charakteristickými vektory x a y , tedy medián $\{i \in \{1, \dots, n\}; x_i = 1 \text{ nebo } y_i = 1\}$.

- Sestrojte deterministický protokol pro MED , který komunikuje nejvýše $O(\log^2 n)$ bitů a který funguje, kdykoliv x obsahuje pouze sudá čísla a y jenom lichá.
- Ukažte, že deterministická složitost splňuje $D(MED) \in \Omega(n)$. (*Hint:* Použijte MED k řešení *DISJ*.)

Úloha 4. Nechť $SP : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ je skalární součin nad reálnými čísly, tedy funkce taková, že $SP(x, y)$ udává počet pozic i , kde $x_i = y_i = 1$. Určete deterministickou komunikační složitost $D(SP)$ a hodnotu matice M_{SP} . (*Hint:* Napište M_{SP} jako součin jiných matic.)