NTIN 100 Základy přenosu a zpracování informace **zima 2021/2022**

1. domácí úlohy - Entropie a vzájemná informace

do 21. března 2022

Úloha 1.

a) Pro která pravděpodobnostní rozdělení $p_1, p_2, \ldots, p_n$ platí, že $H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$?

b) Jaký je vztah mezi entropií pravděpodobnostního rozdělení $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$, kde pro nějaké i a j, $p'_i = p'_j = \frac{p_i + p_j}{2}$ a pro všechna k různá od i a j, $p'_k = p_k$. Jak to lze zobecnit?

c) Ukažte, že pokud pro náhodné proměnné X a Y je $H(Y|X) = 0$, pak Y je funkcí X.

Úloha 2. Mějme náhodné proměnné X, Y, Z, které mohou být závislé, a funkci $g(\cdot)$. Ukažte, že

a) $H(X) \geq H(g(X))$

b) $H(X, Y|Z) \geq H(X|Z)$

c) $I(X, Y : Z) \geq I(X : Z)$

d) $I(X : Y|Z) \geq I(X : Z|Y) - I(X : Z) + I(X : Y)$

a určete, kdy nastává rovnost.

Úloha 3. Nalezněte (závislé) náhodné proměnné X, Y, Z takové, že

a) $I(X : Y|Z) > I(X : Y)$

b) $I(X : Y|Z) < I(X : Y)$

Úloha 4. Pro náhodné proměnné X, Y, Z definujme $\rho(X, Y) = H(X|Y) + H(Y|X)$.

a) Ukažte, že $\rho(X, Y) \geq 0$, $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ a $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geq \rho(X, Z)$.

b) Pokud existuje bijekce g taková, že $X = g(Y)$, pak řekneme, že $X \approx Y$. Ukažte, že $\rho(X, Y) = 0$ právě tehdy, když $X \approx Y$.