

1. domácí úlohy - Entropie a vzájemná informace

do 20. března 2018

Úloha 1.

- a) Pro která pravděpodobnostní rozdělení p_1, p_2, \dots, p_n platí, že $H(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$?
- b) Jaký je vztah mezi entropií pravděpodobnostního rozdělení p_1, p_2, \dots, p_n a p'_1, p'_2, \dots, p'_n , kde pro nějaké $i, j \in N$ a $\epsilon \in (0, 1)$, $p'_i = \epsilon p_i + (1 - \epsilon)p_j$, $p'_j = \epsilon p_j + (1 - \epsilon)p_i$ a pro všechna k různá od i a j , $p'_k = p_k$. Jak to lze zobecnit?
- c) Ukažte, že pokud pro náhodné proměnné X a Y je $H(Y|X) = 0$, pak Y je funkcí X .

Úloha 2. Mějme náhodné proměnné X, Y, Z , které mohou být závislé, a funkci $g(\cdot)$. Ukažte, že

- a) $H(X) \geq H(g(X))$
- b) $H(X, Y|Z) \geq H(X|Z)$
- c) $I(X, Y : Z) \geq I(X : Z)$
- d) $I(X : Y|Z) \geq I(X : Z|Y) - I(X : Z) + I(X : Y)$
- a určete, kdy nastává rovnost.

Úloha 3. Pro náhodné proměnné X, Y, Z definujme $I(X : Y : Z) = I(X : Y) - I(X : Y|Z)$.

- a) Ukažte, že $I(X : Y : Z)$ je symetrická, tedy $I(X : Y : Z) = I(Z : X : Y) = I(Y : Z : X)$.
- b) Nalezněte X, Y, Z takové, že $I(X : Y : Z) < 0$
- c) Ukažte, že $I(X : Y : Z) = H(X, Y, Z) - H(X, Y) - H(Y, Z) - H(Z, X) + H(X) + H(Y) + H(Z)$.

Úloha 4. Pro náhodné proměnné X, Y, Z definujme $\rho(X, Y) = H(X|Y) + H(Y|X)$.

- a) Ukažte, že $\rho(X, Y) \geq 0$, $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ a $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geq \rho(X, Z)$.
- b) Pokud existuje bijekce g taková, že $X = g(Y)$, pak řekneme, že $X \approx Y$. Ukažte, že $\rho(X, Y) = 0$ právě tehdy, když $X \approx Y$.