**TIN 086 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti II** **léto 2015/2016**

**2. domácí úlohy - Náhodné procházky na grafech**

do 15. dubna 2016

**Úloha 1.** Uvažujme cestu na $n$ vrcholech očíslovaných zleva doprava čísly $1, \ldots, n$. Ukažte, že pro každé $1 \leq j \leq n$, očekávaná délka procházky z vrcholu $j$ končící po dosažení vrcholu 1 nebo $n$ je $(n-j)(j-1)$. Dále ukažte, že očekávaná doba pokrytí této cesty procházkou začínající v $j$ je $E[T_j] = (n-j)(j-1) + (n-1)^2$.

**Úloha 2.** Pro $d$-regulární úplný (zakořeněný) strom s $n$ vrcholy dokažte, že jeho očekávaná doba pokrytí je $\Omega(n \log^2 n / \log d)$. ($d$-regulární úplný (zakořeněný) strom má všechny vrcholy stupně 1 nebo $d$ a všechny listy jsou stejně vzdálené od kořene tohoto stromu.)

**Úloha 3.** *Lízátko:* Lízátko o $n$ vrcholech, $n$ sudé, je graf sestávající z úplného grafu velikosti $n/2$ a k němu připojené cesty velikosti $n/2$. Ukažte, že očekávaná doba přechodu z libovolného vrcholu stupně $n/2 - 1$ do vrcholu stupně jedna je $\Theta(n^3)$. *Hint:* Uvažte markovovský proces s $n/2 + 2$ stavy, kde $n/2$ stavů reprezentuje jednotlivé vrcholy cesty, jeden ze stavů reprezentuje vrchol $s$ úplného grafu připojeného k cestě a zbylý stav reprezentuje událost "Jsme v jednom z vrcholů úplného grafu různém od $s$." Určete pravděpodobnosti přechodů mezi jednotlivými stavy tohoto markovovského procesu, nalezněte stacionární rozdělení tohoto procesu a pro každý stav $i$ určete očekávanou dobu návratu $E[T_{i,i}]$. Z těchto údajů odvoďtě požadovaný výsledek.

**Úloha 4.** *Pavučina:* Pavučina je graf na $2n$ vrcholech sestávající z úplného grafu $K_n$ na vrcholech $1, \ldots, n$, kde ke každému z vrcholů $1 \leq i \leq n$ je připojen vrchol $n + i$. Žádné další hrany nemá. Ukažte, že očekávaná doba pokrytí pavučiny je $\Theta(n^2 \log n)$. *Hint:* Nalezněte očekávanou dobu přechodu mezi vrcholy $i, j > n$.