TIN 086 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti II **léto 2013/2014**

3. domácí úlohy - Booleovské obvody

do zkoušky

Úloha 1. Ukažte, že pro každou booleovskou formuli velikosti s se spojkami AND, OR a NOT existuje branching program velikosti $O(s)$, který ji počítá.

Úloha 2. Cílem tohoto cvičení je dokázat Barringtonovu větu. Pro permutaci σ na k prvcích definujeme $\sigma^1 = \sigma$ a $\sigma^0 = 1_k$, kde 1_k je identická permutace na k prvcích. Permutační branching program P je dán posloupností permutací $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ na k prvcích a posloupností indexů $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$. Délkou branching programu P rozumíme $|P| = m$. Na vstupu x je hodnota programu P permutace získaná vyhodnocením

$$\sigma_1^{x_{i_1}} \sigma_2^{x_{i_2}} \cdots \sigma_m^{x_{i_m}}.$$

Branching program P σ-reprezentuje funkci f, pokud na vstupu x, kde $f(x) = 1$, se vyhodnotí na permutaci σ a jinak se vyhodnotí na 1_k.

a) Pro permutace σ a τ na k prvcích ukažte, že pokud branching program P σ-reprezentuje funkci f, pak existuje branching program P' stejné délky, který τ-reprezentuje f.

b) Ukažte, že pokud branching program P σ-reprezentuje funkci f, pak existuje branching program P' stejné délky, který σ-reprezentuje NOT(f).

c) Ukažte, že pokud branching program P σ-reprezentuje funkci f a branching program Q τ-reprezentuje funkci g, pak f AND g lze $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$-reprezentovat branching programem délky nejvýše $2|P| + 2|Q|$.

d) Ukažte, že existují cyklické permutace σ a τ na 5 prvcích takové, že $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ je cyklická permutace.

e) Pro každou booleovskou formuli hloubky d se spojkami AND, OR a NOT a permutaci σ na 5 prvcích, existuje permutační branching program délky 4^d, který ji σ-reprezentuje.

Úloha 3. Ukažte, že pro každou booleovskou funkci $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ existuje branching program velikosti nejvýše $O(2^n/n)$, který ji počítá.

Úloha 4. Ukažte, že s velkou pravděpodobností náhodně zvolená booleovská funkce $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ se nedá počítat branching programem velikosti nejvýše $2^n/n^2$,