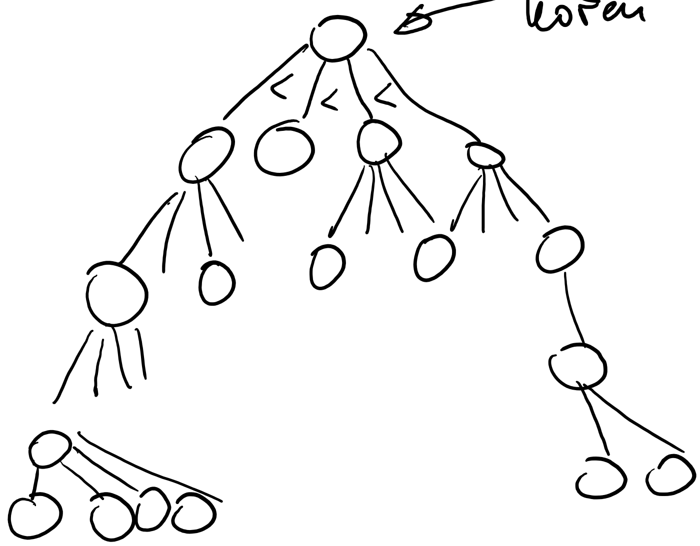
(a,b) - stromy

21 October, 2021 12:58

- a,b celá čísla $a \geq 2$, $b \geq 2a-1$
- (a,b) - strom je strom, kde
  1) každý vnitřní uzel má alespoň <u>a</u> a nejvýše <u>b</u> synů
  2) kořen má alespoň 2 a nejvýše b synů (pokud není list)
  3) všechny listy jsou ve stejné výšce

kořen



- hodnoty jsou uloženy pouze v listech setříděné zleva doprava
- každý vnitřní uzel si pamatuje maxima* všech synů podstromů (s výjimkou svého nejpravějšího podstromu)

*ne nutně maximum obsažené v listech,

||
"závory"

obsažené v listech, ale číslo x t.ž. vždy listy jsou nejvýše toto číslo, ale následující list mimo podstrom je větší než x.

- (a,b)-strom hloubky $\underline{d}$ má alespoň a^{d-1} a nejvýše b^d listů

$\Rightarrow$ strom obsahující $\underline{n}$ hodnot (listů) má hloubku d, kde $\log_b n \le d \le 1 + \log_a n$

- a, b se volí v závislosti na použití

  např.: $(2,3)$-stromy

  B-stromy $a, b \approx$ velikost bloku na disku

<u>Find(x)</u>: projdi strom od kořene, jdi vždy do nejpravějšího podstromu, kde by x ještě mohlo být.

uzel – reprezentace <u>závor</u> pomocí pole

$\rightarrow$ možné binární vyhledávání správné závory.

→ log b kroků na vrchol

→ čas $\leq \lg_b n \cdot O(\lg b)$

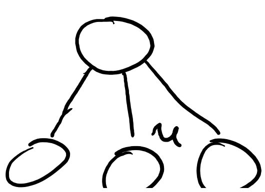
$b = O(a)$

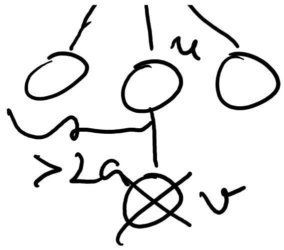
$$= \frac{\lg n}{\lg b} \cdot O(\lg b) =$$

$$O(\lg n)$$

Insert(x):
- najdi vrchol v, pod který patří nový list x.
- pokud v má $< b$ synů přidej nový list s x.
- pokud v má b synů, rozštěp v na dva vrcholy, levý s $\left\lfloor \frac{b-1}{2} \right\rfloor$ a pravý s $\left\lceil \frac{b+1}{2} \right\rceil$ syny.
  (→ = vytvoř nový vrchol v', kam se přesune $\left\lfloor \frac{b-1}{2} \right\rfloor$ nejlevějších synů)
- rekurzivně vlož v' do otce v.

Delete(x): rekurzivně od listu v obsahujícího x:
- pokud otec <u>u</u> mazaného vrcholu obsahuje $> a$ synů, smaž <u>v</u> → hotovo.
- pokud <u>u</u> spolu se svým levým nebo pravým sourozencem obsahuje $> 2a$
  … jednoho syna sourozence

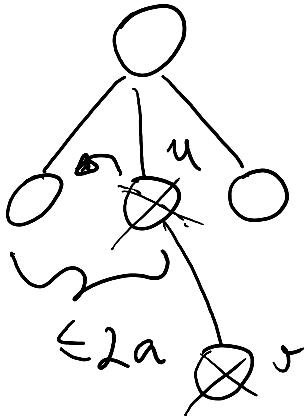




nebo prajm ...

synů, přesuň jednoho syna sourozence

do u, smaž v → hotovo



- pokud u spolu se svým levým nebo pravým sourozencem má nejvýše 2a synů, předej syny u do jeho sourozence, pak smaž prázdný u.
- a rekurzivně smaž prázdný u.
- → zaktualizuj informace v otci u o jeho sourozencích

- Find trvá čas $O(\lg n)$
- Insert, Delete ... čas $O(\lg_b n)$ pokud operace slití/štěpení trvá jednotkový čas.

$\rightarrow \approx O\left(\frac{b}{\lg b} \lg n\right)$ elementárních operací.

- počet štěpení při n Insertech do prázdného stromu $O(n)$.

  → amortizovaně $O(1)$ štěpení na Insert

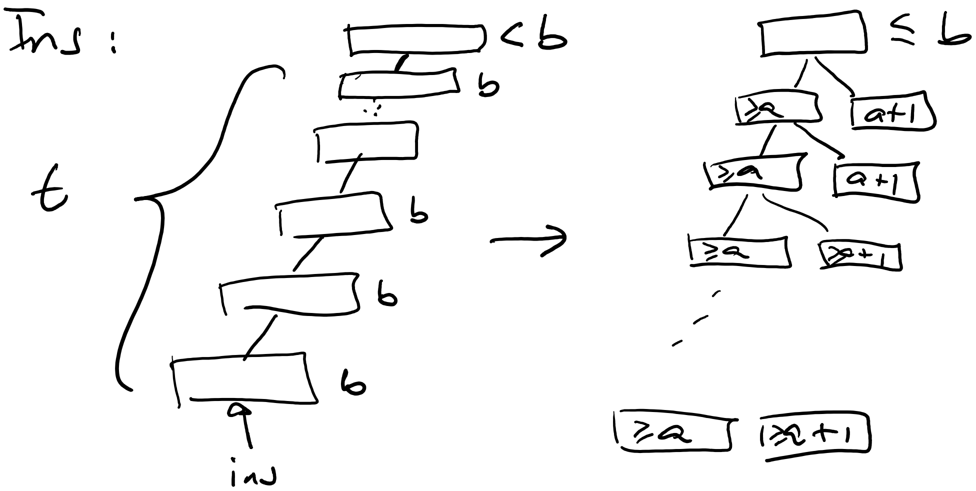
- pokud $b \geq 2a$, pak počet štěpení/slévání nejvýše při $\underline{m}$ insertech a $\underline{\ell}$ deletech je $O(m+l)$.

Dk: zavedíme potenciál Φ

$$\Phi = 2 \times \#a + 1 \times \#(a-1) + 2 \times \#(b-1) + 4 \times \#b$$

$\#a$ – počet vrcholů majících a potomků ve stromu

operace Ins:



t vrcholů s b syny se rozštěpí na $2t$ vrcholů

alespoň t z nich má $\geq a+1$ synů & $< b-1$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \geq a & \geq a+1 & \leq b \\ +2t & +1t & +4 \end{array}$$

$$\Delta\Phi \leq -4t \quad (=b)$$

$$\leq 4-t$$

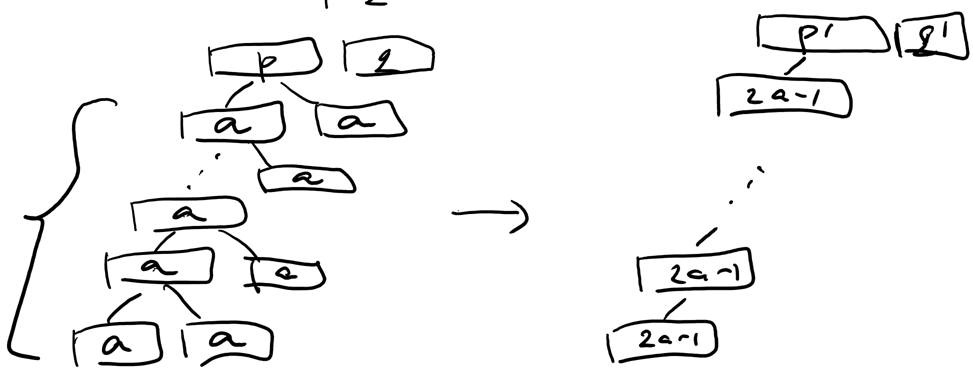
skutečný čas $t+1$ jednotek $= 4-t+t+1$

$\Rightarrow$ amortizovaný čas Ins ≤ 3 jednotky

- jednotka je nejdelší čas na slití/rozštěpení.

$p+q \geq 2a$ $\qquad$ $\overset{\overset{a}{\uparrow}}{p'} + \overset{\overset{a}{\uparrow}}{q'} = p+q-1$

Oprava Del:



$\leq 2a-1 < b \quad p' \quad q'$

$\Delta\Phi \leq -2 \times 2s \qquad + 2 \times s \qquad + 4 + 4$

$\leq 8 - 2s$

$\Rightarrow$ reálný čas $\leq s + 1$

amort. čas $\leq s+1+8-2s \leq 9$ $\qquad \boxtimes$