

11. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Komplementarita a metoda řezů

PŘÍKLAD PRVNÍ
simplexovou metodou.

Nalezněte přípustné bazické řešení přes pomocnou úlohu a následně vyřešte

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2 + x_3 \leq 12 \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 \geq -7 \\ & x_5 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

D(Volnost): Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j -tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x' .

Pak *volnost* (slack) j -té nerovnosti vůči řešení x' je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla \geq , definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řešení.

T(Komplementarita): Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (\text{P})$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \quad (\text{D})$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x^*, y^*) . Pak platí následující věta: Dvojice (x^*, y^*) je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \quad (1)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}: s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \quad (2)$$

PŘÍKLAD DRUHÝ

Franta uhodl řešení $x = (6, 2, 0)$ následujícího LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 14 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 28 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte za pomoci komplementarity, zda Franta uhodl optimální řešení.

PŘÍKLAD TŘETÍ Františka opsala od souseda při písence z Optimalizací primál a optimální řešení duálu. Primálem je:

$$\begin{aligned} \min & 10x_1 - 4x_2 \\ & x_1 + 0.6x_3 + 4x_4 \geq 43 \\ & x_1 - x_2 + 0.6x_3 + 10x_4 \geq 27 \\ & x_1 - x_2 - 0.4x_3 - x_4 \geq 24 \\ & x_1 - x_2 - 0.4x_3 - 2x_4 \geq 22 \\ & x_1 + 3.6x_3 - 3x_4 \geq 56 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimálním řešením duálu je $y = (3.36, 0, 0, 6.48, 0.16)$. Úloha se však ptala na optimální řešení původního programu. Dořešte úlohu za Františku s použitím komplementarity.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Pro LP a jeho duál z předchozího příkladu nalezněte dvojici nenulových vektorů x a y takovou, že platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \quad (1)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}: s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \quad (2)$$

ale x a y **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

Tip: Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.

Metoda řezů: Mějme mnohostěn $P = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A i b jsou racionální.

D: Necht' nerovnice $\alpha^T x \leq \beta$ je platná nerovnice pro P . Pak nerovnici $\lfloor \alpha^T \rfloor x \leq \lfloor \beta \rfloor$ nazýváme platný řez.

Platný řez splňuje každý celočíselný bod mnohostěnu P . Obecný platný řez dostaneme sečtením nerovnic definujících mnohostěn vynásobených nezápornými čísly, zaokrouhlením koeficientů a pravé strany. Přesněji platný řez lze získat jako $\lfloor y^T A \rfloor x \leq \lfloor y^T b \rfloor$ pro nějaké $y \geq 0$.

Následující věta říká, že přidáváním platných řezů dokážeme vytvořit jakoukoliv nerovnost platnou pro všechny celočíselné body P .

T: Necht' $P = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ je racionální mnohostěn a necht' $\alpha^T x \leq \beta, \alpha \in \mathbb{Z}^n, \beta \in \mathbb{Z}$ je nerovnost, kterou splňují všechna $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$. Pak $\alpha^T x \leq \beta$ lze odvodit postupným přidáváním platných řezů k P .

PŘÍKLAD PÁTÝ Vyzkoušíme si přidávání platných řezů pro konkrétní instanci problému batohu: Máme 5 věcí, váha i -té je w_i a cena c_i . Batoh má nosnost $W = 50$ a chceme maximalizovat součet věcí v batohu, abychom nepřekročili kapacitu. Věci jsou:

id	1	2	3	4	5
w_i	21	11	51	26	30
c_i	37	12	500	50	41

Celočíselné optimum je $(1, 0, 0, 1, 0)$ s hodnotou 87, ale optimum relaxace je $(0, 0, 50/51, 0, 0)$ s hodnotou 490,2. Jaké nerovnosti (splněné každým celočíselným řešením) přidat, aby se optimum relaxace co nejvíce přiblížilo celočíselnému optimu?