

9. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Totální unimodularita

D: Čtvercová matice $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ je *unimodulární*, pokud $\det M \in \{-1, 1\}$.

T: Součin a inverze unimodulárních matic jsou unimodulární matice.

T: Unimodulární matice jsou právě ty celočíselné matice, jejichž inverze je celočíselná.

D: Matice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je roven $-1, 0$ nebo 1 .

D: Mnohostěn nazveme *celočíslným*, pokud má všechny vrcholy celočíselné.

T: Uvažme lineární program $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, kde b je celočíselný vektor a A je totálně unimodulární matice. Pak je mnohostěn přípustných řešení celočíselný.

T(Důsledek předchozí věty): Uvažme celočíselný program ILP: $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}$ a jeho lineární relaxaci LP: $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$. Pokud je b celočíselný vektor a A totálně unimodulární, pak vrcholové optimální řešení LP je optimálním řešením ILP.

PŘÍKLAD PRVNÍ Nechť A je totálně unimodulární matice a nechť I je libovolně velká matice, která má v každém sloupci právě jednu jednotku a zbytek nuly. Dokažte následující:

- Dokažte, že A může obsahovat jen prvky $0, 1$ nebo -1 .
- Ukažte, že A^T , $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ a $(A|I)$ jsou totálně unimodulární matice.

PŘÍKLAD DRUHÝ Mějme zadanou matici X . Ověřte, jestli matice X je totálně unimodulární, bez použití následujícího příkladu.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD TŘETÍ Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C . Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$,
- každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty,
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C .
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba řádky patří do B , nebo oba patří do C .

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Tip: Dokazujte indukci podle velikosti čtvercové podmatice. Začněte tím, že eliminujete případy, kdy v jednom sloupci je nejvýše 1 nenulová hodnota.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Dokažte, že každá matice incidence orientovaného grafu je totálně unimodulární.

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselných řešení některých problémů?

PŘÍKLAD ŠESTÝ Nalezněte matici, která není totální unimodulární, ale elementárními řádkovými úpravami z ní lze dostat totálně unimodulární matici.