7. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda

Úloha LP v rovnicovém tvaru: max $c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D: *Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \ldots n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

Bázické řešení x odpovídající B je řešení $Ax = b$, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

Přípustná báze je taková, že odpovídající bázické řešení x je přípustné, tedy $x \geq 0$.

Pivotovací pravidla (některá):

- největší koeficient – vstupní proměnná bude ta, která má v aktuální účelové funkci největší koeficient.
- největší přírůstek – zvolíme vstupní proměnnou, která povede k největšímu možnému přírůstku účelové funkce.
- nejstrmější hrana – vybereme vstupující proměnnou, jejímž zavedením do báze se průběžné bazické přípustné řešení posune ve směru, který svírá nejmenší úhel s vektorem c. Chceme tedy maximalizovat $\frac{c^T \cdot (x' - x)}{||c|| \cdot ||x' - x||}$, kde x je aktuální bazické přípustné řešení a x' je řešení, které bychom dostali vstupem uvažované zlepšující proměnné do báze.
- Blandovo pravidlo (nejmenší index) – vybereme vstupující proměnnou s nejmenším možným indexem.

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\operatorname{conv}(0, (0, 0, \ldots, 0, 1), (0, 0, \ldots, 1, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, 0))$$

Příklad první Nalezněte počáteční bazické přípustné řešení pomocí simplexového algoritmu (na jiném LP). Podařilo se vám ho najít do 3 kroků?

$$\begin{aligned} \max\ 4x_2 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 &= 5 \\ -x_2 + x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý Vyřešte simplexovou metodou:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\
& x_5 = -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\
& x_6 = -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\
& x_7 = 1 - x_1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Poté spočítejte stejnou úlohu pomocí pravidla "největší koeficient".

Příklad třetí Dokažte nebo vyvraťte: Mějme d-dimenzionální simplex $S \subset \mathbb{R}^d$. Existuje nadrovina h taková, že průnik ani jednoho jí indukovaného (uzavřeného) poloprostoru s S není simplex (libovolné dimenze)?

Tip: Zkuste si nakreslit malé simplexy a odvodit to podle nich.

Příklad čtvrtý Určete, kolik stěn dimenze k má d-dimenzionální simplex.

Příklad pátý Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste si nakreslit mnohostěn P a zdůvodnit, proč se algoritmus zastavil. Závisí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ na mnohostěnu P:

$$
\begin{array}{rcrcr}
x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
-x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0.}
\end{array}
$$

- Optimalizujte funkci $\max 4x + 5y + 3z$ na mnohostěnu P:

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &\geq 20 \\
5x + 6y + 5z &\leq 50 \\
x + 3y + 5z &\leq 30 \\
x, y, z &\geq 0
\end{aligned}
$$