6. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda

Úloha LP v rovnicovém tvaru: max $c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D: *Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \dots n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

Bázické řešení x odpovídající B je řešení, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

Přípustná báze je taková, že odpovídající bázické řešení je přípustné.

Příklad první Vyřešte následující úlohu LP:

$$\begin{aligned} \max\ 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý Převeďte LP do rovnicového tvaru s nezápornými proměnnými:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 + x_3 &\leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &\geq -7 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte také nějaké bazické přípustné řešení pro zadaný rovnicový tvar.

Máme-li libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými, kolik nejvýše může mít rovnicový tvar této úlohy proměnných?

Příklad třetí Mějme zadaný následující problém:

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ x_1 - x_5 + x_6 &= 20 \\ x_1 + x_3 + x_7 &= 30 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_8 &= 10 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 &= 1 \\ x_1, x_2, \dots, x_9 &\geq 0 \end{aligned}$$

a počáteční bazické řešení $(0, 0, 0, 0, 0, 20, 30, 10, 1)$. Proveďte jeden krok simplexového algoritmu. Zdůvodněte, proč jste si vybrali ze všech možností právě tento.

Příklad čtvrtý Vyřešte následující optimalizační úlohu už celou:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad pátý Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bazické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$\begin{aligned} \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 12 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, \ldots, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$