5. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Mnohostěny, jejich stěny a konvexita

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\mathrm{conv}(0, (0,0,\dots,0,1), (0,0,\dots,1,0), \dots, (1,0,\dots,0,0))$$

Příklad první **Dvě konvexní vlastnosti:**

- Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n} \in \mathbb{R}^d$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tak potom i libovolná konvexní kombinace bodů splňuje ta samá omezení, čili $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ takové, že $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ platí, že:

$$\vec{a_i}^T \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x_j} \right) \leq b_i.$$

- Dokažte, že když body $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n} \in \mathbb{R}^d$ splňují sadu omezení $\vec{a_i}^T \cdot \vec{x_j} \leq b_i$ pro $i, j \in \{1,\ 2, \dots, n\}$, tak potom ty samé body splňují i libovolnou konvexní kombinaci těchto omezení. Tj. $\forall \beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$ takové, že $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ platí, že:

$$\left(\sum_{k=1}^n \beta_k \vec{a_k} \right)^T \cdot \vec{x_j} \leq \sum_{k=1}^n \beta_k b_k.$$

Příklad druhý

- Dokažte, že každá stěna *omezeného* mnohostěnu je konvexním obalem podmnožiny jeho vrcholů. Ukažte také, že bez slova „omezeného“ tvrzení neplatí.
- Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.

Příklad třetí Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1,1,1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

a

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zde navíc vypište všechny vrcholy daného mnohostěnu.

Příklad čtvrtý Dokažte, že množina všech optimálních řešení daného LP zadaného například takto:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$$

je konvexní množina.

Příklad pátý Ukažte, že libovolný průnik konvexních množin je konvexní množina.