4. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Linearita, afinita, konvexita … prostě geometrie

D: Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá *konvexní množinou*, pokud $\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K musí mít každý bod obsažený v K.

D: Vektor x je *konvexní kombinací* množiny vektorů $a_1, a_2, \ldots a_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ a navíc $\forall i : \alpha_i \in [0,1]$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *v konvexní poloze* („konvexně nezávislá“), pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních.

D: *Konvexní obal* $\mathrm{conv}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v $\mathbb{R}^d$, který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x \mid Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a realný vektor b.

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x \mid c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: Stěny dimenze 0 nazýváme *vrcholy*. Stěny dimenze 1 nazýváme *hrany*. Stěny dimenze $d-1$ nazýváme *fasety*.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

Příklad první

- Víme, že v $\mathbb{R}^d$ je maximálně d lineárně nezávislých vektorů a maximálně $d+1$ afinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v $\mathbb{R}^d$ konvexně nezávislých vektorů?
- Jaký je počet stěn 3D krychle?

Příklad druhý

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + v$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor v. Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že $A = L + v$ pro nějaký vektor v.

Charakterizujte všechny vektory v, které posunou lineární prostor L na afinní prostor A.

Příklad třetí

Vlastnosti polytopů:

- Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn P a najděte dvě různé tečné nadroviny n_a, n_b, jejichž neprázdný průnik s P určuje tutéž stěnu.
- Mějme konvexní mnohostěn P. Dokažte, že průnik dvou stěn P je také stěna P.

Příklad čtvrtý

Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Příklad pátý

Dokažte, že každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v $\mathbb{R}^d$ má alespoň $d + 1$ vrcholů a alespoň $d + 1$ faset.

Příklad šestý

Dokažte následující tvrzení. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Pro každý vektor $u \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathrm{Aff}(M) + u = \mathrm{Aff}(M + u)$ a $\mathrm{conv}(M) + u = \mathrm{conv}(M + u)$.