3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Formulace celočíselných LPček a jejich relaxace

Příklad první NP-těžký problém Vážené vrcholové pokrytí je zadaný následovně:

Vstup: Neorientovaný graf G s nezápornými reálnými vahami na vrcholech, zadaných funkcí $w : V(G) \to \mathbb{R}_0^+$.

Cíl: Najít podmnožinu vrcholů S takovou, že každá hrana $e \in E(G)$ má alespoň jeden koncový vrchol v S (říkáme, že vrchol *pokryje* tuto hranu, odtud vrcholové pokrytí).

Ze všech takových podmnožin S hledáme tu, která ma *nejmenší váhu*, čili nejmenší součet $\sum_{s \in S} w(s)$.

Navrhněte celočíselný program s proměnnými $x \in \{0,1\}$, který najde optimální řešení problému Vážené vrcholové pokrytí.

Navíc zkuste vymyslet, jak využít relaxaci celočíselného programu k tomu, abychom našli 2-aproximaci zadaného problému.

Příklad druhý Celočíselné optimum $\leq$ neceločíselné optimum (při maximalizaci):

Mějme zadanou matici A a vektory b a c. Z nich můžeme postavit třeba tento celočíselný program C: $\max c^T x$ za podmínek $Ax \leq b$ pro $x \in \{0,1\}^n$.

Můžeme z nich ale postavit také následující lineární program L: $\max c^T x$ za podmínek $Ax \leq b$ pro $x \in [0,1]^n$.

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné a mají optimální řešení. Pojmenujme jedno optimální řešení celočíselného programu x_C^* a jedno optimální řešení lineárního programu x_L^*. Zdůvodněte, že platí následujíci nerovnost:

$$c^T x_C^* \leq c^T x_L^*.$$

Příklad třetí Pro problém vrcholové 3-obarvitelnosti grafu vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Tento program pouze otestuje, zda-li je zadaný graf 3-obarvitelný.

Příklad čtvrtý Navrhněte celočíselný program pro hledání minimální kostry grafu. Můžete využít i exponenciálně mnoho podmínek.

Příklad pátý Formulujte CLP na hledání perfektního párování minimální váhy pro vážený bipartitní graf $G = (U, V, E, w)$ s partitami U a V, kde $w(e) \in \mathbb{R}$ je váha hrany e.

Perfektní párování je množina hran taková, že každý vrchol je incidentní s právě jednou hranou, a váha párování je součet vah všech hran v párování.

Zkuste vymyslet příklad, kdy nefunguje hladový algoritmus.