2. CVIČENÍ Z OPTIMALIZAČNÍCH METOD

Naučíme se nový „programovací jazyk“: lineární nerovnice

Příklad první Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy.

- K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli.
- Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli.
- Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli.
- Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce.

Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun.

Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéci?

Příklad druhý Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic (čili LP):

$$\begin{aligned} -2x + 3y &\leq 3 \\ x + y &\leq 6 \\ -x + y &\geq -4 \\ x + 3y &\leq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Pro účelové funkce:

a) max $x + y$
b) max $-3x + y$

Co se stane, když odebereme poslední dvě podmínky, tj. $x \geq 0, y \geq 0$?

Příklad třetí Formulujte prokládání přímkou jako LP. Máme n bodů v rovině. Najděte přímku (resp. souřadnice přímky), která minimalizuje sumu vertikálních vzdáleností bodů od výsledné přímky. Vertikální vzdálenost je vzdálenost měřena pouze na ose y.

Pro jednoduchost předpokládejte, že výsledná přímka není kolmá na osu x.

Příklad čtvrtý Rozhodněte, zda lze a popř. jak:

1. Převést LP, které má všechny proměnné $x \in \mathbb{R}_0^+$, na LP s proměnnými $x' \in \mathbb{R}$ a naopak.
2. Převést LP s podmínkami ve tvaru nerovností a s proměnnými $x \in \mathbb{R}$ na LP, jehož podmínky jsou pouze rovnosti, ale proměnné jsou omezené (a naopak).
3. Převést úlohu LP bez optimalizační klauzule na rovnicový tvar a vyřešit Gaussovou eliminací.

Příklad pátý Zformulujte problém batohu pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro předměty, kde každý má nějakou váhu a cenu, máme batoh s danou nosností a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali jejich cenu.

Příklad šestý Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je min $\sum_{uv \in E} f(uv) x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{i|ui \in E} x_{ui} = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.