Úlohy ke cvičení – 22.5.2019

Definice 1. *Buď $G = (V, E)$ orientovaný graf a X, Y podmnožiny V. Řekneme, že X* je propojená s Y, *jestliže existuje $|Y|$ vrcholově disjunktních cest z X do Y. (Cesty jsou* vrcholově disjunktní, *ne pouze vnitřně vrcholově disjunktní. Navíc povolujeme i cesty délky nula pokud $X \cap Y \neq \emptyset$.)*

Definice 2. *Nechť je $G = (V, E)$ orientovaný graf a S, T jsou podmnožiny V.* Gammoid *je matroid s nosnou množinou T, kde podmnožina $X \subseteq T$ je nezávislá právě tehdy, když S je propojená s X v G. Gammoid je* striktní, *pokud $T = V$.*

Definice 3. *Mějme množinu S a systém podmnožin $\{A_j; j \in J\}$, kde každé $A_j \subseteq S$. Množina $\{e_i; i \in I\}$, kde $e_i \in S$ a $I \subseteq J$ je* částečná transverzála *pokud pro všechny $i \in I$ platí, že $e_i \in A_i$. Nezávislé množiny transverzálního matroid nad S je určen částečnými transverzálami nad systémem $\{A_j; j \in J\}$.*

Úloha 1: Jednoduchý regulární matroid M ranku r je maximální pokud neexistuje jiný jednoduchý regulární matroid N ranku r, že M je restrikce N. Ukažte, že $M(K_n)$ je maximální regulární pro každé $n \geq 2$.

Úloha 2: Nechť jsou G a H 3-souvislé grafy. Ukažte, že pokud $M(G) \cong M(H)$ pak $G \cong H$.

Úloha 3: Dokažte, že v gammoidu je rank množiny $X \subseteq T$ roven velikosti nejmenšího (S, X)-řezu.

Úloha 4: Ukažte, že každý uniformní matroid je izomorfní nějakému gammoidu. Lze uniformní matroid reprezentovat i jako striktní gammoid?

Úloha 5: Ukažte, že každý transverzální matroid je izomorfní nějakému gammoidu.

Úloha 6: Ukažte, že každý striktní gammoid je transverzální matroid.