Úlohy ke cvičení – 15.5.2019

Úloha 1: Nalezněte A matici alespoň 3×3, aby A nebyla totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?

Úloha 2: Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- Matroid je regulární, právě když existuje reprezentace R, která je totálně unimodulární.
- Matroid je regulární, právě když každá reprezentace R je totálně unimodulární.
- Matroid je regulární, právě když každá reprezentace R obsahující jen $\{-1, 0, 1\}$ je totálně unimodulární.
- Je-li matroid grafovy, tak jeho kazda reprezentace R obsahujici jen $\{-1, 0, 1\}$ je totalne unimodularni.

Úloha 3: Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C. Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$,
- každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty,
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba řádky patří do B nebo zároveň do C.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Úloha 4: Dokažte, že 0/1-matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní.

Úloha 5: Uvažme matici R_{10}, zapsanou níže:

$$R_{10} = I_5 + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zodpovězte následující otázky:

- Jaky je duál matroidu R_{10}?
- Je matroid R_{10} grafový?
- Je determinant každé čtvercové submatice roven $\{-1, 0, 1\}$?
- Dá se pravá 5×5 část matice R_{10} doplnit mínusky tak, aby už předchozí bod platil?

Úloha 6: Jednoduchý regulární matroid M ranku r je maximální pokud neexistuje jiný jednoduchý regulární matroid N ranku r, že M je restrikce N. Ukažte, že $M(K_n)$ je maximální regulární pro každé $n \geq 2$.