Úlohy ke cvičení – 25.4.2019

Definice 1. Obvod matroidu M *značíme* $g(M)$ *a je to délka nejkratší kružnice* M*. Pokud* M *žádnou kružnici nemá, klademe* $g(M) = \infty$*.*

Mějme klasickou sudoku mřížku (9×9), vyplněnou čísly 1 až 9 (ne nutně podle pravidel sudoku). Řekneme, že řádek r_i, sloupec s_i nebo blok b_i je *konzistentní*, jestliže obsahuje každé číslo z množiny $\{1, \ldots, 9\}$ právě jednou.

Označme K množinu všech řádků, sloupců a bloků. Množina $X \subseteq K$ *zkontroluje* celé sudoku, pokud po ověření, že jsou všechny řádky, sloupce a bloky v X konzistentní už si můžeme být jistí, že jsou všechny řádky, sloupce a bloky konzistentní.

Našim cílem je najít nejmenší množinu X, která zkontroluje celé sudoku.

Úloha 1: Buď M matroid, který není izomorfní $U_{t,n}$ pro každé $n \geq 2t - 1$. Dokažte, že potom platí $\lambda(M) = \min\{\kappa(M), g(M)\}$.

Úloha 2: Ať M je k-souvislý matroid a (X, Y) je jeho Tutteho k-separace s $|X| = k$. Pak X je buďto nezávislá kokružnice, nebo konezávislá kružnice.

Úloha 3: Najděte nějakou malou množinu útvarů, která zkontroluje cele sudoku. Potom zkuste pro tuto množinu ověřit, že žádná její vlastní podmnožina už nekontroluje celé sudoku.

Úloha 4: Označme $\mathcal{B} \subseteq 2^K$ množinu všech v inkluzi minimálních množin, které zkontrolují celé sudoku. Berte jako fakt, že $\mathcal{B}$ je množina bází matroidu na množině K. Jak toho využít k řešení naší otázky?

Úloha 5: Je matroid z minulého příkladu uniformní?

Úloha 6: Ukažte zjednodušenou formu výměnného axiomu: Pokud $L \in \mathcal{B}$ a platí, že první řádek leží v L a druhý neleží, tak můžeme nahradit první řádek za druhý a výsledná změněná L' splňuje $L' \in \mathcal{B}$.