Úlohy ke cvičení – 3.4.2019

Úloha 1:

1. Dokažte, že matroid $M_1 \oplus M_2$ je nesouvislý, i když M_1 i M_2 jsou souvislé.
2. Dokažte, že matroid je nesouvislý, právě když $\mathcal{I}(M) = \mathcal{I}(M_1 \oplus M_2)$ pro $E(M_1)$ nějakou podmnožinu $E(M)$ a $E(M_2) = E(M) - E(M_1)$.

Úloha 2: Nechť v matroidu M je $\{e, f\}$ kružnice a kokružnice zároveň. Dokažte, že potom už je to komponenta M.

Úloha 3: Mějme bázi B a hranu $e \notin B$. Označme jako *fundamentální kružnici obsahující hranu e vůči bázi B* kružnici, která vznikne v $B + e$.

Je pravda, ze každá kružnice $C \in \mathcal{C}(M)$ je buď fundamentální kružnicí, nebo vznikne posloupností eliminací fundamentálních kružnic vůči bázi B?

Posloupností eliminací myslíme: vezmeme dvě fundamentální kružnice C_1, C_2, ty zeliminujeme, dostaneme nějakou kružnici C_a, nyní zeliminujeme kružnici C_a s fundamentální kružnicí C_3 a dostaneme $C_b, \ldots$, a nakonec eliminací dostáváme C.

Úloha 4: Zkonstruujte polynomiální algoritmus, který zjistí, zda je M souvislý.

Úloha 5: Nechť je matroid $M = (E, \mathcal{I})$ souvislý a $e \in E$. Dokažte, že alespoň jeden z matroidů $M - e, M/e$ je také souvislý.