Úlohy ke cvičení – 27.3.2019

Věta 1 (Matroid Intersection Theorem)**.** *Nechť* $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ *a* $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ *jsou matroidy. Pak,*

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{A \subseteq E} r_1(A) + r_2(E \setminus A).$$

Úloha 1: Mějme matroid $M = (E, \mathcal{I})$ a váhovou funkci $w\colon E \to \mathbb{R}$, která je prostá. Ukažte, že existuje jediná báze maximální váhy.

Úloha 2: Pokud w není prostá, krok hladového algoritmu nemusí být určen jednoznačně. Dokažte, že v takovém případě hladový algoritmus může vrátit libovolnou maximální bázi.

Úloha 3: Modifikujte hladový algoritmus, tak aby našel největší bázi obsahující nějakou pevnou nezávislou množinu I.

Úloha 4: Ukažte, že velikost maximálního párováni v souvislém bipartitním grafu G je rovna velikosti minimálního vrcholového pokrytí v G.

Úloha 5: Dokažte, že algoritmická verze Matroid Intersection pro 3 matroidy je NP-těžký problém.

Úloha 6: Dokažte následující větu. Mějme $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ a $M_2 = (E_1, \mathcal{I}_2)$ matroidy ($E_1 \cap E_2$ může být neprázdný). Vytvořme $M = \big(E_1 \cup E_2, \{I_1 \cup I_2 | I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}\big)$. Pak M je matroid a jeho ranková funkce pro $U \subseteq E_1 \cup E_2$ lze spočítat jako:

$$r(U) = \min_{T \subseteq U} \big(|U \setminus T| + r_1(T \cap E_1) + r_2(T \cap E_2)\big).$$