Úlohy ke cvičení – 6.3.2019

Úloha 1: Rozhodněte, jestli následující struktury jsou matroid:

a) Máme graf G, elementy matroidu jsou hrany. Elementy jsou nezávislé, pokud spolu tvoří párovaní (ne nutně maximální, proste nějaké). Počítáme i prázdné párovaní.

b) Vezmeme Fanovu rovinu (konečnou projektivní rovinu na 7 vrcholech). Elementy matroidu budou body roviny, a množina bodu je nezávislá, pokud žádné tři body neleží na přímce.

c) Mějme číslo $k \geq 3$ a hypergraf H (nosná množina X a systém podmnožin H). Elementy matroidu jsou hrany (množiny) z H. Elementy $E_1, E_2, \ldots, E_\ell$ jsou nezávislé, pokud žádný vrchol z $\bigcup_{i \leq \ell} E_i \subseteq X$ není pokrytý k množinami/elementy E_i.

Úloha 2: Mějme následující matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chápejme ji jednou jako matici nad $\mathbb{Z}_2$, a podruhé jako matici nad $\mathbb{Z}_3$. Jsou maticové matroidy těchto dvou matic totožné?

Úloha 3: Jaké vlastnosti se ztratí, když přejdu od grafu ke grafovému matroidu? Představme si, ze máme grafový matroid $M(G)$ vzniklý z jednoduchého grafu G, jenže tento matroid $M(G)$ je zadaný orákulem, čili:

- známe celou množinu elementů E,
- pro každou podmnožinu elementů $X \subseteq E$ se můžeme dotázat orákula, jestli platí $X \in \mathcal{I}$.

Jde rozhodnout (s libovolnou výpočetní silou) následující otázky?

a) Byl původní graf souvislý?

b) Obsahoval původní graf kliku na alespoň 30 vrcholech?

c) Obsahoval původní graf perfektní párovaní?

Úloha 4: Popište uniformní matroid $U_{m,n}$ pomocí matice nad vhodným tělesem – nebo vymyslete algoritmus, jak tuto reprezentaci spočítat.

Úloha 5: Jde každý maticový matroid popsat jako grafový matroid nějakého grafu? Jde každý grafový matroid popsat jako maticový matroid pro nějakou matici?

Úloha 6: Co je duální matroid uniformního matroidu $U_{m,n}$?

Úloha 7: Nalezněte duál matroidu popsaného následující maticí nad $\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$