

## Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021):

### (13) Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

**Definice 1** Mějme vektorový prostor  $V$  nad  $\mathbb{T}$ . Bilineární forma je zobrazení  $b : V^2 \rightarrow \mathbb{T}$ , které je lineární v obou složkách. Tedy  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$  a  $u, v, w \in V$  platí,

$$\begin{aligned}b(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha b(u, w) + \beta b(v, w) \\b(w, \alpha u + \beta v) &= \alpha b(w, u) + \beta b(w, v).\end{aligned}$$

**Definice 2** Bilineární forma  $b$  je symetrická pokud  $b(u, v) = b(v, u)$  pro všechna  $u, v$ .

**Definice 3** Zobrazení  $f : V \rightarrow \mathbb{T}$  je kvadratická forma, pokud se dá vyjádřit  $f(u, u) = b(u, u)$  pro nějakou symetrickou bilineární formu  $b$ .

**Věta 1 (Sylvestrův zákon setrvačnosti)** Bud'  $f(x) = x^T A x$  kvadratická forma. Pak existuje báze, vůči níž má  $f$  diagonální matici s prvky  $1, -1, 0$ . Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.

**Cv. 1.** Určete signaturu formy dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 2.** Najděte polární bázi reálné kvadratické formy  $g((x, y, z)^T) = 2xz - 2xy$  a určete její signaturu.

**Cv. 3.** Kvadratická forma má (vzhledem ke kanonické bázi) vyjádření

$$g((w, x, y, z)^T) = 2w^2 + 2wx - x^2 - 2xz - z^2.$$

Určete její signaturu.

**Cv. 4.** V závislosti na parametru  $a \in \mathbb{R}$  určete signaturu formy s maticí  $B$  a s maticí  $C$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Cv. 5.** Mějme danu reálnou kvadratickou formu

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xy + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$  je tato forma pozitivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?

**Cv. 6.** Najděte polární bázi kvadratické formy  $g((x, y, z)^T) = 2x^2 + 3xy + xz + 4y^2 + yz$  na vektorovém prostoru  $\mathbb{Z}_5^3$ .