Příklady na procvičení z Lineární algebry 2 (LS 2020/2021): (13) Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Definice 1 *Mějme vektorový prostor V nad $\mathbb{T}$.* Bilineární forma *je zobrazení $b : V^2 \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Tedy $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $u, v, w \in V$ platí,*

$$\begin{aligned} b(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha b(u, w) + \beta b(v, w) \\ b(w, \alpha u + \beta v) &= \alpha b(w, u) + \beta b(w, v). \end{aligned}$$

Definice 2 *Bilineární forma b je symetrická pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro všechna u, v.*

Definice 3 *Zobrazení $f : V \to \mathbb{T}$ je kvadratická forma, pokud se dá vyjádřit $f(u, u) = b(u, u)$ pro nějakou symetrickou bilineární formu b.*

Věta 1 (Sylvestrův zákon setrvačnosti) *Buď $f(x) = x^T Ax$ kvadratická forma. Pak existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky $1, -1, 0$. Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.*

Cv. 1. Určete signaturu formy dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matici diagonalizujeme prováděním řádkových a sloupcových úprav (po provedení jedné řádkové úpravy provedeme vždy identickou sloupcovou úpravu).

První úprava v následujícím postupu je odečtení prvního řádku od druhého, po kterém následuje odečtení prvního sloupce od druhého. Dále přičteme dvojnásobek prvního řádku (sloupce) ke třetímu a nakonec dvojnásobek druhého řádku (sloupce) ke třetímu.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Výsledná matice je v diagonálním tvaru s dvěma kladnými a jedním záporným prvkem na diagonále, její signatura je tedy $(2, 1, 0)$.

Cv. 2. Najděte polární bázi reálné kvadratické formy $g((x,y,z)^T) = 2xz - 2xy$ a určete její signaturu.

Řešení:

Postup je podobný jako při diagonalizaci matice kvadratické formy, jenom je nutné „pamatovat“ si použité úpravy. Převádíme-li A na diagonální matici S^TAS pomocí řádkových a sloupcových úprav, pak matice S^T je vlastně součin matic provedených elementárních úprav a matice S je součinem (stejných) sloupcových úprav.

Je-li na začátku výpočtu matice A maticí kvadratické formy vzhledem ke kanonické bázi, pak dle věty o matici kvadratické formy při změně báze je výsledná S^TAS maticí stejné formy vůči bázi B pro kterou je $S = {}_{\text{kan}}[id]_B$ a tedy B je báze tvořená sloupci matice S. Polární báze je taková, vůči níž je matice kvadratické formy diagonální, tedy máme-li převod A na diagonální tvar S^TAS, pak sloupce matice S tvoří hledanou polární bázi.

Proto, abychom S spočítali, stačí postupně aplikovat sloupcové úpravy použité při diagonalizaci A na jednotkovou matici (na A aplikujeme řádkové i sloupcové úpravy, ale pomocí S si „pamatujeme“ jenom ty sloupcové, řádkové jsou reprezentovány maticí S^T, ale tu počítat nemusíme).

Konkrétně pro danou kvadratickou formu $g((x,y,z)^T) = 2xz - 2xy$ určíme její matici (vzhledem ke kanonické bázi)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a tu diagonalizujeme spolu s jednotkovou maticí, na kterou ale aplikujeme jenom sloupcové úpravy.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(přičetli jsme třetí řádek a sloupec k prvnímu, na pravé straně jenom sloupec)

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(přičetli jsme třetí řádek a sloupec k druhému)

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

(odečteme polovinu prvního řádku a sloupce od posledního)

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(spíše z estetických důvodů nakonec vynásobíme poslední řádek a sloupec dvěma, prvek na pozici $(3,3)$ se tak vynásobí 4).

Polární báze je tvořena sloupci matice S (pravá strana ve výpočtu), to jest vektory

$$(1,0,1)^T,\ (0,1,1)^T,\ (-1,0,1)^T$$

a signatura formy je $(1,1,1)$.

Cv. 3. Kvadratická forma má (vzhledem ke kanonické bázi) vyjádření

$$g((w,x,y,z)^T) = 2w^2 + 2wx - x^2 - 2xz - z^2.$$

Určete její signaturu.

Řešení:
Z analytického vyjádření formy sestavíme její matici (vzhledem ke kanonické bázi).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Na tuto matici aplikujeme postup s řádkovými a sloupcovými úpravami a převedeme ji na diagonální tvar.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Pozor, úprava na druhém řádku je odečtení čtvrtého řádku a sloupce od druhého.)

Výsledná signatura formy je $(1,2,1)$.

Cv. 4. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu formy s maticí B a s maticí C

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Nyní již řádkovou a odpovídající sloupcovou úpravu provedeme najednou.

Pro matici B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pro matici C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Signatury obou forem jsou tedy stejné a závisí na znaménku parametru a (závislost je triviální, přesný výsledek zde nevypisujeme).

Cv. 5. Mějme dánu reálnou kvadratickou formu

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xy + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma positivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?

Řešení:
Matice formy se od předchozí liší jen nepatrně,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

Pro ověření positivní definitnosti vyjdou první dva determinanty stejně jako v předchozím příkladu, stačí tedy vypočítat pouze

$$\det(A_3) = -a^2 + 2a + 3 = -(a - 3)(a + 1).$$

Jeho hodnota bude kladná pro $a \in (-1, 3)$, takže matice A, resp. kvadratická forma g, je positivně definitní právě tehdy, když a leží v intervalu $(-1, 3)$.

Kvadratická forma g nemůže být negativně definitní pro žádné $a \in \mathbb{R}$, neboť $g((1, 0, 0)^T) = 1 > 0$ nezávisle na volbě parametru a.

Cv. 6. Najděte polární bázi kvadratické formy $g((x, y, z)^T) = 2x^2 + 3xy + xz + 4y^2 + yz$ na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Řešení:
Postup je shodný s postupem v předchozím příkladu, pouze ho provádíme nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Matice dané kvadratické formy (vzhledem ke kanonické bázi) je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní diagonalizujeme pomocí řádkových a sloupcových úprav a na pravé straně provádíme pouze sloupcové úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Z výsledné matice určíme polární bázi

$$(1,0,0)^T,\ (3,1,0)^T,\ (0,3,1)^T.$$